Exercice 8 - Annale Technicien Géomètre 2015, Exercice 3

Par Dryss de "19 en Maths !", le 11 mars 2018

I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog : https://wp.me/p8hcjR-9N

II Coup de pouce

1/ Deux méthodes sont possibles pour cette question.

- celle utilisant les propriétés des vecteurs, et en particulier le théorème de Chasles
- l'analytique, qui passe par des calculs avec les coordonnées de vecteurs.

Dans tous les cas, afin de ne pas perdre le correcteur, il faut bien prendre le temps en début de résolution d'expliquer quelles notations vous utiliserez pour les coordonnées de B et U (x_B par exemple pour l'abscisse de B).

2/ Grâce à la dernière écriture trouvée en question 1, une distinction de cas selon la valeur de k ($k > \beta$, $k = \beta$ et $k < \beta$) donne la réponse.
Pour rappel, l'équation cartésienne d'un cercle de centre $(\lambda; \mu)$ et de rayon R est $(x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2 = R^2$.

III Correction

Pour tout l'exercice, on note $(x_M; y_M)$ les coordonnées de M.

1/

Commentaire

Deux méthodes sont possibles pour cette question.

- celle utilisant les propriétés des vecteurs, et en particulier le théorème de Chasles
- l'analytique, qui passe par des calculs avec les coordonnées de vecteurs.

Comme on a deux écritures à déterminer, j'utiliserai Chasles pour la première, l'analytique pour la seconde. Mais comme toujours, il est possible de faire différemment !

- **Exprimer $f(M)$ sous la forme $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$, où B est à déterminer.**
  On sait que, pour tout $M \in P$:

$$\begin{aligned} f(M) &= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OM}.(\vec{i}+\vec{j}) \\ &= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AM}).(\vec{i}+\vec{j}) \\ &= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA}.(\vec{i}+\vec{j}) + \overrightarrow{AM}.(\vec{i}+\vec{j}) \\ &= \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AM}+\vec{i}+\vec{j}) + \overrightarrow{OA}.(\vec{i}+\vec{j}) \end{aligned}$$

Or, étant donné les coordonnées du point A, on remarque que $\overrightarrow{OA}$ et $(\vec{i}+\vec{j})$ sont perpendiculaires. Donc $\overrightarrow{OA}.(\vec{i}+\vec{j}) = 0$.

Commentaire

On peut aussi utiliser un calcul avec les coordonnées :
$\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\vec{i}+\vec{j}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Donc $\overrightarrow{OA}.(\vec{i}+\vec{j}) = (-1)\times 1 + 1 \times 1 = 0$

Donc, pour tout $M \in P$, $f(M) = \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AM}+\vec{i}+\vec{j})$. On cherche donc B tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}+\vec{i}+\vec{j}$. Un rapide calcul donne que B a pour coordonnées $(-2; 0)$.

- **Exprimer $f(M)$ sous la forme $\alpha\overrightarrow{UM}^2 + \beta$, où U, α et β sont à déterminer.**
  On note $(x_U; y_U)$ les coordonnées de U. On a donc les coordonnées de vecteurs suivantes :

$$\overrightarrow{UM}\begin{pmatrix} x_M - x_U \\ y_M - y_U \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M + 1 \\ y_M - 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \qquad \vec{i}+\vec{j}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule, pour tout $M \in P$:

$$\begin{aligned} f(M) &= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OM}.(\vec{i}+\vec{j}) \\ &= (x_M+1)^2 + (y_M-1)^2 + x_M + y_M \\ &= x_M^2 + 2x_M + 1 + y_M^2 - 2y_M + 1 + x_M + y_M \\ &= x_M^2 + 3x_M + y_M^2 - y_M + 2 \end{aligned}$$

De plus, on calcule pour tout $M \in P$:

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{UM}^2 + \beta &= \alpha[(x_M - x_U)^2 + (y_M - y_U)^2] + \beta \\ &= \alpha[x_M^2 - 2x_M x_U + x_U^2 + y_M^2 - 2y_M y_U + y_U^2] + \beta \\ &= \alpha x_M^2 - 2\alpha x_M x_U + \alpha x_U^2 + \alpha y_M^2 - 2\alpha y_M y_U + \alpha y_U^2 + \beta \\ &= \alpha x_M^2 - 2\alpha x_U x_M + \alpha y_M^2 - 2\alpha y_U y_M + \alpha y_U^2 + \alpha x_U^2 + \beta \end{aligned}$$

Par identification, on obtient donc le système d'équations suivant : $\begin{cases} \alpha = 1 \\ -2\alpha x_U = 3 \\ \alpha = 1 \\ -2\alpha y_U = -1 \\ \alpha y_U^2 + \alpha x_U^2 + \beta = 2 \end{cases}$

On résout :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -2\alpha x_U = 3 \\ \alpha = 1 \\ -2\alpha y_U = -1 \\ \alpha y_U^2 + \alpha x_U^2 + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ -2x_U = 3 \\ -2y_U = -1 \\ y_U^2 + x_U^2 + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ x_U = \frac{-3}{2} \\ y_U = \frac{1}{2} \\ \beta = 2 - y_U^2 - x_U^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ x_U = \frac{-3}{2} \\ y_U = \frac{1}{2} \\ \beta = 2 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

On a donc, pour tout $M \in P$, $f(M) = \overrightarrow{UM}^2 - \frac{1}{2}$, avec U ayant pour coordonnées $(\frac{-3}{2}; \frac{1}{2})$.

2/ Soit $k \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble des points $M \in P$ tels que $f(M) = k$.

Or, $f(M) = k \Longleftrightarrow \overrightarrow{UM}^2 - \frac{1}{2} = k \Longleftrightarrow \overrightarrow{UM}^2 = k + \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left(x_M + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y_M - \frac{1}{2}\right)^2 = k + \frac{1}{2}$.

Procédons par distinction de cas :

- Si $k < \frac{-1}{2}$:

  L'équation $\left(x_M + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y_M - \frac{1}{2}\right)^2 = k + \frac{1}{2}$ n'a donc pas de solution (le second terme étant strictement négatif, alors que le premier est positif).

  La ligne de niveau $f(M) = k$ pour $k < \frac{-1}{2}$ est l'ensemble vide.

- Si $k = \frac{-1}{2}$:

  $\overrightarrow{UM}^2 = k + \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \overrightarrow{UM}^2 = 0$. Cette équation implique que M et U sont confondus.

  La ligne de niveau $f(M) = \frac{-1}{2}$ est le point U.

- Si $k > \frac{-1}{2}$:

  $\left(x_M + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y_M - \frac{1}{2}\right)^2 = k + \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \left(x_M + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y_M - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{k + \frac{1}{2}}\right)^2$. On reconnait ici l'équation d'un cercle.

  La ligne de niveau $f(M) = k$ pour $k > \frac{-1}{2}$ est donc le cercle de centre U et de rayon $\sqrt{k + \frac{-1}{2}}$.