Exercice 7, Technicien Géomètre 2017

Par Dryss de 19 en Maths !, le 5 mars 2018

I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog : https://wp.me/p8hcjR-9w

II Coup de pouce

1/ Pas de difficulté : on utilise la dérivée de f pour déterminer son sens de variations.

2/ a/ Première formule de trigonométrie de l'exercice : $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$.

b/ On utilise l'intégrale de f, en faisant attention à deux pièges :

- La courbe $\mathcal{C}$ se trouve sous l'axe des abscisses, donc l'intégrale calculée n'aura pas le bon signe pour l'aire ;
- l'unité graphique est de 3 cm, alors que l'intégrale nous donne une aire en "unité d'aire".

3/ Deuxième formule trigonométrique de l'exercice : $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$. Puis il s'agit d'un calcul d'intégrale sans difficulté.

III Correction

1/ f est la composée de fonctions dérivables sur $[9;\pi]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle. On calcule la dérivée f' de f. Pour tout $x \in [0;\pi]$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} 2\sin^2 x \times \cos x = \sin^2 x \cos x$$

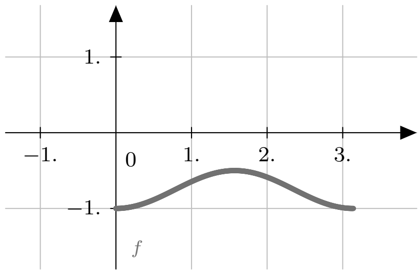
Dressons le tableau de signe de f' :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin^2 x$		$+$		$+$	
$\cos x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit que f est strictement croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$.

Pour la construction graphique, on calcule :

- $f(0) = -1$;
- $f(\pi) = -1$;
- $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$



2/ a/ D'après les règles de trigonométrie, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$.
On peut donc remplacer dans f. Pour tout $x \in [0;\pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sin^2 x &= -1 + \frac{2\sin^2 x}{4} \\ &= -\frac{4 - 2\sin^2 x}{4} \\ &= -\frac{3 + 1 - 2\sin^2 x}{4} \\ &= -\frac{3 + \cos 2x}{4} \end{aligned}$$

b/ On sait que f est une fonction continue sur $[0;\pi]$, elle admet donc des primitives sur cet intervalle. On calcule :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^\pi -\frac{3 + \cos 2x}{4}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi -\frac{3}{4}\mathrm{d}x - \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{4}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{3}{4}x\right]_0^\pi - \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi \\ &= -\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Cependant, on sait que f est négative sur $[0;\pi]$. On en déduit que l'aire de P est de signe contraire à $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

Donc l'aire de P est $\frac{3\pi}{4}$ unités d'aires. Or, l'énoncé précise que l'unité graphique est de 3cm.

Donc l'unité d'aire est de 9cm^2. ,On peut donc conclure que l'aire P est de $\frac{27\pi}{4}$ cm^2.

3/ Une deuxième formule de trigonométrie nous indique que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$.
On calcule donc, pour tout $x \in [0;\pi]$:

$$\begin{aligned}
[f(x)]^2 &= \left[-\frac{3+\cos 2x}{4}\right]^2 \\
&= \frac{9+6\cos 2x+\cos^2 2x}{16} \\
&= \frac{9+6\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}}{16} \\
&= \frac{\frac{18+12\cos 2x+1+\cos 4x}{2}}{16} \\
&= \frac{19+12\cos 2x+\cos 4x}{32}
\end{aligned}$$

f étant continue sur $[0;\pi]$, $[f(x)]^2$ l'est aussi sur cet intervalle. $[f(x)]^2$ admet donc des primitives sur $[0;\pi]$.
On calcule donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi [f(x)]^2 \mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{19+12\cos 2x+\cos 4x}{32}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \frac{19}{32}\mathrm{d}x + \frac{12}{32}\int_0^\pi \cos 2x \mathrm{d}x + \frac{1}{32}\int_0^\pi \cos 4x \mathrm{d}x \\
&= \frac{19}{32}[x]_0^\pi + \frac{12}{32}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi + \frac{1}{32}\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^\pi \\
&= \frac{19\pi}{32}
\end{aligned}$$

On en déduit que la valeur efficace E de f est :

$$E = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x)]^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{19\pi}{32}} = \sqrt{\frac{38}{64}} = \frac{\sqrt{38}}{8}$$