Oral 7, Inspecteur des Finances Publiques

Par Dryss de "19 en Maths !", le 15 janvier 2018

I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog :
http://19enmaths.fr/entrainement-oral-inspecteur-des-finances-publiques-7/

II Coup de pouce

EXERCICE 1
On résout cet exercice en passant par de la géométrie analytique. Prendre le repère $(B; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$, et exprimer les coordonnées de tous les points dans ce repère.
Puis se rappeler que démontrer que (DH) est orthogonale à (HQ) revient à démontrer que $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HQ} = 0$.

EXERCICE 2
Calculer les intégrales suivantes :

1/ Il s'agit d'un jeu d'écriture : $x\sqrt{x+1} = (x+1-1)\sqrt{x+1}$

2/ On utilise une intégration par partie.

3/ On utilise un changement de variable "bien choisi" : ici, $t = \ln x$.

4/ On utilise les règles de Bioche pour trouver le bon changement de variable.

III Correction

EXERCICE 1
On utilise la géométrie analytique dans le repère $(B; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$. Dans ce repère, on sait que :

- $B(0;0)$;
- $C(1;0)$;
- $D(1;1)$
- $Q(\alpha;0)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $P(0;\alpha)$

1/ On détermine tout d'abord l'équation de la droite (PC).
Comme $C(1;0)$ et $P(0;\alpha)$, on a que l'équation de la droite (PC), de la forme $y = ax + b$, est donnée par :

$$y = \frac{y_C - y_P}{x_C - x_P}x + y_P = -\alpha x + \alpha$$

2/ On détermine ensuite les coordonnées de H.
On sait que H est le point appartenant à (PC) tel que $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{PC} = 0$.
Or, les coordonnées de $\overrightarrow{PC}$ sont $\begin{pmatrix} x_C - x_P \\ y_C - y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$
De plus, les coordonnées de $\overrightarrow{BH}$ sont $\begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_H - 0 \\ y_H - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_H \\ -\alpha x_H + \alpha \end{pmatrix}$.
On calcule donc avec le produit scalaire :

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{PC} = 0 \iff 1 \times x_H + (-\alpha) \times (-\alpha x_H + \alpha) = 0 \iff x_H = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$$

On en déduit que H a pour coordonnées $\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}; -\alpha\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} + \alpha\right) = \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}; \frac{\alpha}{\alpha^2+1}\right)$

3/ Enfin, on démontre que $(QH) \perp (HD)$.
On sait que les coordonnées de $\overrightarrow{QH}$ sont $\begin{pmatrix} x_H - x_Q \\ y_H - y_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} - \alpha \\ \frac{\alpha}{\alpha^2+1} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha^3+\alpha^2-\alpha}{\alpha^2+1} \\ \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \end{pmatrix}$.
De plus, les coordonnées de $\overrightarrow{HD}$ sont $\begin{pmatrix} x_H - x_D \\ y_H - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} - 1 \\ \frac{\alpha}{\alpha^2+1} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2+1} \\ \frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha^2+1} \end{pmatrix}$.

On calcule donc le produit scalaire :

$$\overrightarrow{QH}.\overrightarrow{HD} = \frac{-\alpha^3+\alpha^2-\alpha}{\alpha^2+1} \times \frac{1}{\alpha^2+1} + \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \times \frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha^2+1} = \frac{-\alpha^3+\alpha^2-\alpha+\alpha^3-\alpha^2+\alpha}{(\alpha^2+1)^2} = 0$$

On en déduit donc que (QH) et (HD) sont orthogonales.

EXERCICE 2

1/ La fonction intégrée est continue sur $[0;3]$, donc l'intégrale existe. On calcule :

$$\begin{aligned}
I = \int_0^3 x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 (x+1)\sqrt{x+1}\mathrm{d}x - \int_0^3 \sqrt{x+1}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 (x+1)^{3/2}\mathrm{d}x - \int_0^3 (x+1)^{1/2}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right]_0^3 - \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^3 \\
&= \frac{2}{5}(4^{5/2}-1) - \frac{2}{3}(4^{3/2}-1) \\
&= \frac{2}{5}(32-1) - \frac{2}{3}(8-1) \\
&= \frac{116}{15}
\end{aligned}$$

D'où I $= \dfrac{116}{15}$

2/ La fonction intégrée est continue sur $[1;e]$, donc l'intégrale existe. On utilise ici une intégration par parties (ce qui est possible car toutes les fonctions intervenants dans cette IPP sont de classe $\mathcal{C}^1$).

Commentaire

Pour rappel, lorsqu'on a une intégration par partie à faire, il faut choisir "avec feeling" la fonction à dériver qui va simplifier le calcul de l'intégrale. Pour cela, on utilise **la règle "LPET"** : on cherche à dériver d'abord les fonction Logarithme, puis les fonctions Polynômes, puis les fonctions Exponentielles, et enfin les fonctions Trigonométriques.
Cependant, cette règle "empirique" n'a rien d'automatique, et souffre de quelques contre-exemples. Mais elle fonctionne dans 95% des cas !

$$\begin{aligned}
J = \int_1^e x^2 \ln x\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^3}{3}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e \\
&= \frac{e^3}{3}\ln e - \frac{1^3}{3}\ln 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9} \\
&= \frac{2e^3+1}{9}
\end{aligned}$$

AU BROUILLON

On pose :

$u = \ln x \qquad u' = \dfrac{1}{x}$

$v' = x^2 \qquad v = \dfrac{x^3}{3}$

D'où J $= \dfrac{2e^3+1}{9}$

3/ La fonction intégrée est continue sur $[e;e^2]$, donc l'intégrale existe bien. De plus, on va utiliser le changement de variable $t = \ln x$, qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[e;e^2]$.

On calcule :

$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$

$x = e \Longrightarrow t = 1$

$x = e^2 \Longrightarrow t = 2$

$$
\begin{aligned}
K_n = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln^n x} \mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{t^n} \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} \right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{(n-1)2^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \\
&= \frac{2^{n-1}-1}{(n-1)2^{n-1}}
\end{aligned}
$$

D'où $\mathrm{K}_n = \dfrac{2^{n-1}-1}{(n-1)2^{n-1}}$

4/ La fonction intégrée est continue sur $[0;\pi]$, donc l'intégrale existe.

Commentaire

Pour ce dernier calcul d'intégrale, qui fait intervenir des fonctions trigonométriques sans qu'aucune astuce ne se dégage immédiatement, il faut utiliser un changement de variable en pensant aux **Règles de Bioche**.

Si l'intégrale est sous la forme $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}m$, alors :

- Si $f(-x)\mathrm{d}(-x) = f(x)\mathrm{d}x$, on peut utiliser le changement de variable $t = \cos x$ (pour se le rappeler, $\cos(-x) = \cos x$) ;
- Si $f(\pi - x)\mathrm{d}(\pi - x) = f(x)\mathrm{d}x$, on peut utiliser le changement de variable $t = \sin x$ (pour se le rappeler, $\sin(\pi - x) = \sin x$) ;
- Si $f(\pi + x)\mathrm{d}(\pi + x) = f(x)\mathrm{d}x$, on peut utiliser le changement de variable $t = \tan x$ (pour se le rappeler, $\tan(\pi + x) = \tan x$.

Dans le cas où aucun de ces cas ne fonctionne, on utilise alors le changement de variable qui fonctionne dans tous les cas... mais avec des calculs vraiment terribles !
On utilise le changement de variable $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, puis on se rappelle alors que :

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \tan x = \frac{2u}{1-u^2}$$

Ici, on remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\sin(-2x)}{2+\cos(-x)}\mathrm{d}(-x) = \dfrac{-\sin(2x)}{2+\cos x} - \mathrm{d}x = \dfrac{\sin 2x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$.
On peut donc utiliser le changement de variable $t = \cos x$.

$$\mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \qquad x = 0 \Longrightarrow t = 1 \qquad x = \pi \Longrightarrow t = -1$$

On calcule :

$$
\begin{aligned}
L = \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2+\cos x}\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{2\sin x \cos x}{2+\cos x}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{-1} \frac{-2t}{2+t}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-1}^1 \frac{t}{2+t}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-1}^1 \frac{t+2}{2+t} - \frac{2}{2+t}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-1}^1 \frac{t+2}{2+t}\mathrm{d}t - 4\int_{-1}^1 \frac{1}{2+t}\mathrm{d}t \\
&= 2\,[t]_{-1}^1 - 4\,[\ln(t+2)]_{-1}^1 \\
&= 2 \times (1 - (-1)) - 4(\ln(1+2) - \ln((-1)+2)) \\
&= 4 - 4\ln 3
\end{aligned}
$$

D'où $L = 4(1 - \ln 3)$.