Oral 6, Inspecteur des Finances Publiques

Par Dryss de "19 en Maths !", le 16 janvier 2018

I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog :
https://19enmaths.fr/entranement-oral-inspecteur-des-finances-publiques-6/

II Coup de pouce

EXERCICE 1

1/ a/ On a une décomposition de la forme $a+\dfrac{b}{X-1}+\dfrac{c}{X-2}$. Puis on étudie des limites bien choisies pour déterminer a, b et c.

b/ Penser d'abord à simplifier le quotient avant de passer à une décomposition, qui fait cette fois intervenir une racine double. La forme de la décomposition sera $\dfrac{a}{X-3}+\dfrac{b}{X-5}+\dfrac{c}{(X-5)^2}$.
Ensuite, on détermine a et c par une étude de limite, puis b en remplaçant X par un réel bien choisi.

2/ Trouver les six solutions de $X^6=0$. Puis décomposer F en utilisant la "formule des résidus".

EXERCICE 2

1/ Utiliser un argument de parité.

2/ Se rappeler qu'un nombre premier de la forme $4n+1$ fait forcément partie de la liste $p_1p_2\ldots$

3/ a/ Petit jeu d'écriture en utilisant les congruences.

b/ Utiliser le petit théorème de Fermat.

c/ Conclusion simple.

4/ Terminer la démonstration par l'absurde.

III Correction

EXERCICE 1

1/ a/ On remarque que $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$. Or, ni 1 ni 2 ne sont racines de X^2+3X+5. F_1 est donc sous forme irréductible. Comme le degré du numérateur et du dénominateur sont égaux, et que les racines du dénominateur sont simples, on en déduit que la décomposition en éléments simples est de la forme $F_1=a+\dfrac{b}{X-1}+\dfrac{c}{X-2}$, avec a, b et c réels à déterminer.
Utilisons la méthode des limites pour déterminer ces trois réels :

- On sait que $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}F_1(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}=a$.

  Or, $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}F_1(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2+3x+5}{x^2-3x+2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

  Donc $a=1$.
- De même, $\displaystyle b=\lim_{x\mapsto1}(x-1)F_1(x)=\lim_{x\mapsto1}\frac{x^2+3x+5}{x-2}=\frac{1^2+3+5}{1-2}=-9$
- De même, $\displaystyle c=\lim_{x\mapsto2}(x-2)F_1(x)=\lim_{x\mapsto2}\frac{x^2+3x+5}{x-1}=\frac{2^2+3\times2+5}{2-1}=15$

On en déduit donc que $F_1=1-\dfrac{9}{X-1}+\dfrac{15}{X-2}$

b/ On remarque que 3, qui est une racine du dénominateur, est aussi une racine du numérateur. On peut donc simplifier : $F_2=\dfrac{(X^2-X-6)}{(X-3)^2(X-5)^2}=\dfrac{(X-3)(X+2)}{(X-3)^2(X-5)^2}=\dfrac{(X+2)}{(X-3)(X-5)^2}$, qui est la forme irréductible.
Comme le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur, et que le dénominateur possède 3 comme racine simple et 5 comme racine double, on en déduit que la décomposition en éléments simples est de la forme $F_2=\dfrac{a}{X-3}+\dfrac{b}{X-5}+\dfrac{c}{(X-5)^2}$, avec a, b et c trois réels à déterminer.
De nouveau, utilisons la méthode des limites pour a et c :

- $a = \lim_{x \mapsto 3} (x-3)F_2(x) = \lim_{x \mapsto 3} \dfrac{x+2}{(x-5)^2} = \dfrac{3+2}{(3-5)^2} = \dfrac{5}{4}$
- $c = \lim_{x \mapsto 5} (x-5)^2 F_2(x) = \lim_{x \mapsto 5} \dfrac{x+2}{x-3} = \dfrac{5+2}{5-5} = \dfrac{7}{2}$

Pour déterminer b, on va remplacer x par une valeur "bien choisie".

On prend $x = 4$: $F_2(4) = \dfrac{4^2-4-6}{(4-3)^2(4-5)^2} = \dfrac{16-10}{1^2 \times (-1)^2} = 6$.

Donc : $F_2(4) = 6 \iff \dfrac{\frac{5}{4}}{4-3} + \dfrac{b}{4-5} + \dfrac{\frac{7}{2}}{(4-5)^2} = 6 \iff \dfrac{5}{4} - b + \dfrac{14}{4} = \dfrac{24}{4} \iff b = \dfrac{14+5-24}{4} = -\dfrac{5}{4}$

On peut donc conclure : $F_2 = \dfrac{\frac{5}{4}}{X-3} - \dfrac{\frac{5}{4}}{X-5} + \dfrac{\frac{7}{2}}{(X-5)^2}$

2/ Tout d'abord, on sait que :

$$z^6 + 1 = 0 \iff z^6 = -1 \iff z^6 = e^{i(\pi + 2k\pi)} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \iff z = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

On pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\omega_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)}$. De plus, comme $\omega_k = \omega_{k+6}$, on en conclut que ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 et ω_5 sont les solutions principales de $z^6 + 1 = 0$.

Comme le numérateur et le dénominateur de F_3 sont premiers entre eux, que toutes les racines du dénominateur sont simples, et que le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, on en déduit que la décomposition en éléments simples est de la forme $F_3 = \sum_{k=0}^{5} \dfrac{\lambda_k}{X - \omega_k}$.

Définition

Lorsque la racine p du dénominateur de F_3 est simple, la partie polaire associée à p ne comporte qu'un terme $\dfrac{\lambda}{X-p}$, et on appelle λ le résidu de F en P

Propriété

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, écrit sous forme irréductible. Si Q admet p comme racine, alors le résidu en p vaut $\dfrac{P(p)}{Q'(p)}$.

On fixe $k \in [\![0;5]\!]$. Ici, on voit que $P = 1$ et $Q = X^6 + 1$, d'où $Q' = 6X^5 + 1$. Comme F_3 est écrite sous forme irréductible, et que Q admet ω_k comme racine simple, on en déduit que $\lambda_k = \dfrac{1}{Q'(\omega_k)} = \dfrac{1}{6\omega_k^5} = \dfrac{\omega_k}{-6} = -\dfrac{\omega_k}{6}$.

On en déduit que la décomposition en éléments simples de F_3 est :

$$F_3 = \frac{-1}{6} \sum_{k=0}^{5} \frac{\omega_k}{X - \omega_k} = \frac{-1}{6} \left(\frac{i}{X-i} + \frac{-i}{X+i} + \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{X - e^{i\frac{\pi}{6}}} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{X - e^{-i\frac{\pi}{6}}} + \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{X - e^{i\frac{5\pi}{6}}} + \frac{e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{X - e^{-i\frac{5\pi}{6}}} \right)$$

EXERCICE 2

1/ On voit que $(2p_1p_2p_3...p_r)^2 = 4(p_1p_2p_3...p_r)^2$ est un nombre pair. Donc N est impair. 2 n'est donc pas un diviseur de N.

2/ On suppose qu'il existe un nombre premier de la forme $4n+1$ qui divise N. Or, ce nombre est forcément l'un des p_i. Quitte à permuter les indices, on pose que p_1 divise N.

Comme p_1 divise aussi $(2p_1p_2p_3...p_r)^2$, on en déduit que p_1 divise 1. Or p_1 est premier.

Il y a donc une contradiction. Donc il n'existe pas de nombre premier de la forme $4n+1$ qui divise N.

3/ a/ On suppose que q divise N. On calcule :

$$\begin{aligned}
(2p_1p_2p_3...p_r)^2 + 1 \equiv 0 \quad [q] &\iff (2p_1p_2p_3...p_r)^2 \equiv -1 \quad [q] \\
&\iff [(2p_1p_2p_3...p_r)^2]^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1} \quad [q] \\
&\iff (2p_1p_2p_3...p_r)^{4n+2} \equiv -1 \quad [q] \\
&\iff (2p_1p_2p_3...p_r)^{4n+3-1} \equiv -1 \quad [q] \\
&\iff (2p_1p_2p_3...p_r)^{q-1} \equiv -1 \quad [q]
\end{aligned}$$

b/ On sait que $q \neq 1$ divise N, donc q ne divise pas $N-1$. Autrement dit, q ne divise pas $(2p_1p_2p_3...p_r)^2$, et donc ne divise pas $2p_1p_2p_3...p_r$. De plus, on sait que q est premier.

D'après le petit théorème de Fermat, on peut donc écrire que $(2p_1p_2p_3...p_r)^{q-1} \equiv 1 \quad [q]$.

c/ Comme q est différent de 2, les deux questions précédentes aboutissent à une contradiction. On en déduit que la supposition était fausse. Il n'existe donc aucun nombre premier de la forme $4n+3$ divisant N.

4/ D'après les questions précédentes, il n'existe donc aucun nombre premier divisant N. On aboutit donc à une absurdité. On en déduit que l'ensemble des nombres premiers de la forme $4n+1$ est infini.