Oral 5, Inspecteur des Finances Publiques

Par Dryss de "19 en Maths !", le 9 janvier 2018

I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog : https://19enmaths.fr/oral-inspecteur-des-finances-publiques-5/

II Coup de pouce

EXERCICE 1

1/ Avant tout, remarquer que $\left|\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}|x|^n = \dfrac{1}{n^{1/2}}e^{n\ln|x|}$.
Ensuite, discuter selon les valeurs de x. Pour rappel, on a le théorème suivant :
S'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(u_n z^n)$ tende vers 0, alors $R \geq |z|$.

2/
- Pour $x = 1$, on tombe sur une série de Riemann.
- Pour $x = -1$ On utilisera cette fois le critère des séries alternées.

EXERCICE 2

1/ Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$.

2/ On peut utiliser le critère de d'Alembert :
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, et que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Alors :
- Si $l < 1$, la série de terme général u_n converge ;
- Si $l > 1$, la série de terme général u_n diverge ;
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

3/ On peut utiliser le critère de Cauchy :
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, et que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Alors :
- Si $l < 1$, la série de terme général u_n converge ;
- Si $l > 1$, la série de terme général u_n diverge ;
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

On pourra lever l'indétermination de cet exercice pour certaines valeurs de α en remplaçant la valeur problématique de $\sin^2(\alpha)$ dans l'expression initiale de w_n.

III Correction

EXERCICE 1

On note que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$. Nous sommes donc en présence d'une série entière à termes positifs.

1/ On calcule, en rappelant que $\sin t \underset{0}{\sim} t$:

$$\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}|x|^n = \frac{1}{n^{1/2}}e^{n\ln|x|}$$

- Pour $x = 1$: on a que $\dfrac{1}{n^{1/2}}e^{n\ln|x|} = \dfrac{1}{n^{1/2}}$. Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}} = 0$
S'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(u_n z^n)$ tende vers 0, alors $R \geq |z|$. En appliquant cette propriété avec $u_n = \dfrac{1}{n^{1/2}}$ et $z = 1$, on en déduit que le rayon de convergence de $\sum \dfrac{1}{n^{1/2}}|x|^n$ est supérieur ou égal à 1.
- Pour $x > 1$: on sait que $\dfrac{1}{n^{1/2}}e^{n\ln|x|} = \dfrac{(e^n)^{\ln[x|}}{n^{1/2}}$. On reconnait la forme $\dfrac{(e^n)^\alpha}{n^\beta}$ avec $\alpha > 0$. On en déduit, grâce au théorème des croissances comparées, que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{(e^n)^{\ln[x|}}{n^{1/2}} = +\infty$.
Comme $\dfrac{1}{n^{1/2}}e^{n\ln|x|}$ ne tend pas vers 0 pour $x > 1$, on en déduit que la série de terme général $\dfrac{1}{n^{1/2}}e^{n\ln|x|}$ diverge pour $x > 1$.

On en déduit donc que le rayon de convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^{1/2}}e^{n\ln|x|}$ est égal à 1. Par équivalence, on peut donc conclure que le rayon de convergence de la série entière f est $R = 1$.

2/ On calcule :

- Pour $x = 1$, on a $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1/2}}$. On reconnait ici une série de Riemann de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha < 1$. On en déduit que la série diverge.
- Pour $x = -1$: $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
  - Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$. Comme $(-1)^n$ alterne quant à son signe, on en déduit qu'il s'agit ici d'une série à terme alternés.
  - Comme $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
  - De plus, cherchons le sens de variation de $\left|(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$:

    Pour tout réel strictement positifs a et b tels que $1 \leq a \leq b$:

$$\begin{aligned}
1 \leq a \leq b &\iff 1 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \\
&\iff 1 \geq \frac{1}{\sqrt{a}} \geq \frac{1}{\sqrt{b}} > 0 \\
&\iff \sin 1 \geq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \geq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right) > 0
\end{aligned}$$

    On en déduit que $\left|(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|$ est décroissante sur $n \in \mathbb{N}^*$.

    Commentaire

    On aurait pu utiliser, bien sûr, la dérivation pour trouver le sens de variations. Mais à titre personnel, j'aime bien revenir à la définition de la croissance ou décroissance dans les cas simples :)

  D'après le critère des séries à termes alternés, on en déduit que la série de terme général $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge.

EXERCICE 2

1/ On voit que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 1 + \frac{1}{n} \neq 0$. Donc la série de terme général u_n diverge grossièrement.

2/ Pour tout n, $v_n > 0$. On peut donc utiliser le critère de d'Alembert pour statuer. On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{v_{n+1}}{v_n} \\
&= \frac{\frac{(n+1)^{10000}}{(n+1)!}}{\frac{n^{10000}}{n!}} \\
&= \frac{(n+1)^{10000}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{10000}} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000} \times \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Par composition, on en déduit que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000} \times \frac{1}{n+1} = 0$.

Comme cette limite est strictement inférieure à 1, le critère de d'Alembert permet de conclure que la série de terme général v_n est convergente.

3/ On voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $w_n > 0$. On peut donc utiliser le critère de Cauchy pour statuer.

On calcule : $\sqrt[n]{w_n} = \sqrt[n]{\dfrac{(\sin(\alpha))^{2n}}{n^2}} = \dfrac{\sin^2(\alpha)}{\sqrt[n]{n^2}}$. Or, $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = e^{\ln n^{2/n}} = e^{2\frac{\ln n}{n}}$.

D'après le théorème des croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$. Donc, par composition, on en déduit que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} e^{2\frac{\ln n}{n}} = 1$.

Donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} w_n = \sin^2(\alpha)$.

On sait que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \sin^2(\alpha) \leq 1$. Discutons selon les valeurs de $\sin^2(\alpha)$:

- Si $0 \leq \sin^2(\alpha) < 1$, le critère de Cauchy permet de dire que la suite de terme général w_n est convergente.
- Si $\sin^2(\alpha) = 1$, le critère de Cauchy ne permet pas de conclure. Cependant, on note que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{(2\sin^2(\alpha))^n}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}$. Ici, on reconnait une série de Riemann de la forme $\dfrac{1}{n^\lambda}$, avec $\lambda > 1$. Donc la série de terme général w_n converge pour $\sin^2(\alpha) = 1$

On peut donc conclure que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de terme général w_n est convergente.