Oral 4, Inspecteur des Finances Publiques 2018

Par Dryss de "19 en Maths !", le 5 janvier 2018

I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog : https://19enmaths.fr/oral-inspecteur-finances-publiques-4/

II Coup de pouce

EXERCICE 1

1/ Pour démontrer que E est un SEV de l'ensemble des suites à valeurs complexes, on démontre que la suite nulle est dans E, et que n'importe quelle composition linéraire d'éléments de E est dans E.

2/ Il faut connaître les formules à appliquer dans le cas des suites récurrentes d'ordre 2. De plus, il va y avoir une distinction de cas à effectuer.

EXERCICE 2

1/ Petite résolution simple.

2/ Il faut se rappeler du corollaire du théorème du rang :
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension finie, alors les propriétés suivantes sont équivalentes : f est injective, f est surjective, f est bijective.

3/ La base de $\text{Ker}(f)$ est trouvée dans la question 1, le théorème du rang aide à rédiger proprement la base pour $\text{Im}(f)$.

III Correction

EXERCICE 1

1/ Démontrons que E est un sous espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

- On sait que la suite nulle ($u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) vérifie $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$. Donc la suite nulle appartient à E.
- Soit $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$.
  On calcule :

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} \\ &= \lambda(2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n) + \mu(2av_{n+1} + 4(ia-1)v_n) \\ &= 2a(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + 4(ia-1)(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= 2aw_{n+1} + 4(ia-1)w_n \end{aligned}$$

  Donc (w_n) appartient à E.

On en déduit que E est un sous espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

2/ On reconnait ici une relation de récurrence d'ordre 2. Son équation caractéristique est $z^2 = 2az + 4(ia-1)$ ou encore $z^2 - 2az + 4(1-ia) = 0$.
On calcule le discriminant de ce polynôme :
$\Delta = (-2a)^2 - 4 \times 4(1-ia) = 4(a^2 + 4(ia-1)) = 4(a^2 + 4ia - 4) = 4(a+2i)^2$. On remarque que $\Delta = 0 \iff a = -2i$.
On doit donc distinguer deux cas : lorsque $\Delta = 0$ et lorsque $\Delta \neq 0$.

- Lorsque $a \neq -2i$:
  L'équation caractéristique admet deux solutions distinctes, qui sont

$$z_1 = \frac{2a + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2a + 2(a+2i)}{2} = 2(a+i) \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{2a - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2a - 2(a+2i)}{2} = -2i$$

  On en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha z_1^n + \beta z_2^n$, avec α et β à déterminer.
  Or, on sait que $u_0 = u_1 = 1$. On résout :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0=1 \\ u_1=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta=1 \\ 2(a+i)\alpha+(-2i)\beta=1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} 2(a+i)\alpha=2(a+i)(1-\beta) \\ 2(a+i)(1-\beta)+(-2i)\beta=1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \alpha=1-\beta \\ 2(a+i)(1-\beta)+(-2i)\beta=1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \alpha=1-\beta \\ \beta[2(a+i)+2i]=2(a+i)-1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \beta=\dfrac{2(a+i)-1}{2(a+2i)} \\ \alpha=1-\dfrac{2(a+i)-1}{2(a+2i)} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \beta=\dfrac{2(a+i)-1}{2(a+2i)} \\ \alpha=\dfrac{2i+1}{2(a+2i)} \end{array}\right.$$

Commentaire

La méthode de Cramer donne les valeurs de α et β plus rapidement, mais je ne cache pas que je n'apprécie pas l'utiliser :) Mais bien sûr, n'hésitez pas si vous la maîtrisez bien.

Donc, si $\Delta \neq -2i$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{2i+1}{2(a+2i)}(2(a+i))^n + \frac{2(a+i)-1}{2(a+2i)}(-2i)^n$$

- Lorsque $a=-2i$:
  L'équation caractéristique admet une unique solution, qui est $z_0 = \dfrac{2a}{2} = -2i$.
  Dans ce cas, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha n+\beta)z_0^n$, avec α et β à déterminer.
  Or :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0=1 \\ u_1=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \beta=1 \\ (\alpha+\beta)(-2i)=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \beta=1 \\ \alpha=\dfrac{1}{-2i}-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \beta=1 \\ \alpha=\dfrac{i}{2}-1 \end{array}\right.$$

  On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \left[\left(\dfrac{i}{2}-1\right)n+1\right](-2i)^n$.

EXERCICE 2

1/ On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On calcule :

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & c+2d \\ 2a+4b & 2c+4d \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$M \in \mathrm{Ker}(f) \iff AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l} a+2b=0 \\ 2a+4b=0 \\ c+2d=0 \\ 2c+4d=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=-2b \\ c=-2d \end{array}\right.$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix} -2b & -2d \\ b & d \end{pmatrix} \text{ avec } (b,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$

2/ On sait que f est un endomorphisme. Donc l'ensemble de départ et d'arrivée sont de même dimension finie (ici, 4). Il y a donc équivalence entre f est injective, f est surjective et f est bijective. Or, comme $\mathrm{Ker}(f) \neq 0_E$, on en déduit que f n'est pas injective. Donc f n'est pas surjective.

3/ D'après la question 1, on a que $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix} -2b & -2d \\ b & d \end{pmatrix} \text{ avec } (b,d) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

On nomme $U = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De manière évidente, (U,V) forme une famille libre, et génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Donc (U,V) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

De plus, d'après le théorème de rang, on sait que $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$. Donc $\mathrm{rg}(f) = 2$. On cherche donc deux matrices R et T dans $\mathrm{Im}(f)$ formant une famille libre. On calcule :

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En posant $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on remarque que $R \in \mathrm{Im}(f)$, $T \in \mathrm{Im}(f)$, et que la famille (R, T) est libre et de même cardinal que $\mathrm{Im}(f)$. On en déduit que (R, T) est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Elle forme donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.