Correction Exercice 2, Contrôleur des Finances Publiques 2018

Par Dryss de "19 en Maths !", le 20 décembre 2017

I Sujet

PARTIE 1

Soit $P_n = 4^n + 5$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un multiple de 3.

PARTIE 2

Soit U_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}U_n + \dfrac{3n+6}{2(n+1)} \end{cases}$

1/ Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n < 3$.

2/ Etudier le sens de variation de (U_n).

3/ Calculer la limite de (U_n).

4/ Soit (V_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $V_n = n(3 - U_n)$.

a/ Déterminer la nature de la suite (V_n).

b/ Préciser sa raison et calculer V_1.

c/ Exprimer (V_n), puis (U_n) en fonction de n.

d/ Calculer la limite de (U_n).

II Correction

PARTIE 1

— Première façon, en utilisant le binôme de Newton

D'après la formule du binôme de Newton, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$4^n = (3+1)^n = 3^n \times 1^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} 3^{n-1} \times 1^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} 3^{n-2} \times 1^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-2 \end{pmatrix} 3^2 \times 1^{n-2} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} 3^1 \times 1^{n-1} + 3^0 \times 1^n$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 4^n + 5 &= (3+1)^n + 5 \\ &= 3^n \times 1^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} 3^{n-1} \times 1^1 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} 3^1 \times 1^{n-1} + 3^0 \times 1^n + 5 \\ &= 3^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} 3^{n-1} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} 3^1 + 1 + 5 \\ &= 3\left[3^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} 3^{n-2} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}\right] + 6 \end{aligned}$$

D'après cette écriture, on a bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un multiple de 3.

— Deuxième façon, en faisant une démonstration par récurrence

Soit $H(n)$: "$4^n + 5$ est divisible par 3", définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— INITIALISATION

Pour $n = 1$, on calcule : $4^1 + 5 = 4 + 5 = 9$. Or, 9 est divisible par 3. Donc $H(1)$ est vraie.

— HÉRÉDITÉ

On suppose que $H(n)$ est vraie pour n fixé.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 4^n + 5 \text{ est divisible par } 3 &\iff 4(4^n + 5) \text{ est divisible par } 3 \\ &\iff 4^{n+1} + 20 \text{ est divisible par } 3 \\ &\iff 4^{n+1} + 5 + 15 \text{ est divisible par } 3 \end{aligned}$$

Or, on sait que 15 est divisible par 3. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4^{n+1} + 5$ est divisible par 3.

Donc $H(n+1)$ est vraie.

— CONCLUSION

Par récurrence, on en déduit que $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

PARTIE 2

1/ Faisons une démonstration par récurrence : soit $H(n)$ l'hypothèse "$U_n < 3$" définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— Initialisation : On prend $n = 1$. On sait que $U_1 = 1$. Donc $U_1 < 3$, donc $H(1)$ est vraie.

— On suppose que H est vraie pour un n fixé. Cherchons si H est vraie au rang $n + 1$.

Or

$$\begin{aligned}
U_n < 3 &\iff nU_n < 3n \\
&\iff \frac{n}{2(n+1)}U_n < \frac{3n}{2(n+1)} \\
&\iff \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3n+6}{2(n+1)} < \frac{3n}{2(n+1)} + \frac{3n+6}{2(n+1)} \\
&\Longleftarrow U_{n+1} < \frac{6n+6}{2(n+1)} \\
&\Longleftarrow U_{n+1} < \frac{6(n+1}{2(n+1)} \\
&\Longleftarrow U_{n+1} < 3
\end{aligned}$$

Donc $H(n + 1)$ est vraie.

Par récurrence, on en déduit que $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n < 3$.

2/ On calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
U_{n+1} - U_n &= \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3n+6}{2(n+1)} - U_n \\
&= \frac{nU_n + 3n + 6 - 2(n+1)U_n}{2(n+1)} \\
&= \frac{nU_n + 3n + 6 - 2nU_n + 2U_n}{2(n+1)} \\
&= \frac{n(3 - U_n) + 2(3 - U_n)}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $U_n < 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n > 0$, et donc que (U_n) est croissante.

3/ On sait que (U_n) est croissante et majorée. Elle admet donc une limite finie, qui est nécessairement un point fixe de la suite. On note cette limite l. l vérifie donc :

$$\begin{aligned}
l = \frac{n}{2(n+1)}l + \frac{3n+6}{2(n+1)} &\iff l - \frac{n}{2(n+1)}l = \frac{3n+6}{2(n+1)} \\
&\iff l\left(1 - \frac{n}{2(n+1)}\right) = \frac{3n+6}{2(n+1)} \\
&\iff l\frac{2(n+1) - n}{2(n+1)} = \frac{3n+6}{2(n+1)} \\
&\iff l\frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \\
&\iff l = \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \times \frac{2(n+1)}{n+2} \\
&\iff l = 3
\end{aligned}$$

Donc (U_n) converge vers 3.

4/ a/ On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_n = n(3 - U_n)$. Donc $V_{n+1} = (n + 1)(3 - U_{n+1})$.

On calcule :

$$
\begin{aligned}
V_{n+1} &= (n+1)(3-U_{n+1}) \\
&= (n+1)\left(3-\left[\frac{n}{2(n+1)}U_n+\frac{3n+6}{2(n+1)}\right]\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{6n+6-nU_n-3n-6}{2(n+1)}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{3n-nU_n}{2(n+1)}\right) \\
&= \frac{n(3-U_n)}{2} \\
V_{n+1} &= \frac{V_n}{2}
\end{aligned}
$$

D'après cette écriture, on en déduit que la suite (V_n) est géométrique.

b/ Toujours d'après l'écriture précédente, on voit que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
De plus, $V_1 = 1 \times (3-U_1) = 3-1 = 2$.

c/ Comme (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_1 = 2$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_n = V_1 \times q^{n-1} = 2 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$.
Donc, on peut calculer pour pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$
\begin{aligned}
V_n = n(3-U_n) &\iff \frac{1}{2^{n-2}} = n(3-U_n) \\
&\iff \frac{1}{2^{n-2}n} = 3-U_n \\
&\iff U_n = 3-\frac{1}{2^{n-2}n}
\end{aligned}
$$

d/ On sait que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2^{n-2}n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{2^{n-2}n} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} U_n = 3$.