Correction Exercice 3, Contrôleur des Finances Publiques 2018

Par Dryss de "19 en Maths !", le 11 décembre 2017

I Sujet

PARTIE 1
Soit une agence de location ayant un parc de 18 voitures. 19 voitures sont systématiquement louées à des clients réguliers.
La loi de probabilité du nombre de voitures louées par jour (nommée X) est donnée par le tableau suivant :

x_i	$P(X = x_i)$
11	0,10
12	0,17
13	0,27
14	0,25
15	0,12
16	0,05
17	0,03
18	0,01

1/ Déterminer l'espérance du nombre de voitures louées par jour.

2/ Déterminer l'écart type associé (3 décimales).

L'agence a 300 euros de frais fixes par jour et sa marge par véhicule loué est de 20 euros.

3/ Calculer le bénéfice quotidien espéré.

4/ Est-ce que l'agence est rentable ? Si non, déterminer de combien elle devra augmenter ses tarifs pour être sûre de ne pas perdre d'argent chaque jour.

PARTIE 2
Dans une fête foraine, un organisateur dispose de 2 sacs de 30 boules chacune. Les boules sont indiscernables au toucher et ont la même probabilité d'être tirées.

— Le sac S_1 numéro 1 comprend 27 boules blanches et 3 boules rouges.
— Le sac S_2 numéro 2 comprend 21 boules blanches et 9 boules rouges.

La règle du jeu est la suivante : le joueur mise 1 euro et tire une boule dans le S_1 qu'il remet ensuite dans le S_1.

— Si la boule est rouge, alors le joueur tire une boule dans le S_2, note la couleur et s'arrête là.
— Si la boule est blanche, alors le joueur tire une boule dans le S_1, note la couleur et s'arrête là.

Soit A l'événement "les deux boules tirées sont rouges" et B l'événement "Une seule des boules tirées est rouge".

1/ Déterminer $p(A)$ et $p(B)$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

Si les deux boules obtenues sont rouges, alors le joueur reçoit 10 euros. Si une seule boule est rouge, il reçoit 2 euros. Sinon il perd sa mise.
X désigne alors la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

2/ Déterminer la loi de probabilité de X.

3/ En déduire l'espérance de X. Qu'en déduit-on ?

Soit n un entier naturel supérieur à 2. Le joueur décide de jouer n parties consécutives indépendantes.

4/ Démontrer que la probabilité p_n qu'il pioche au moins une fois dans le sac S_2 est de la forme $p_n = 1 - \alpha^n$, où l'on déterminera α.

5/ Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

II Correction

PARTIE 1

1/ On calcule :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = 11 \times 0,10 + 12 \times 0,17 + \cdots + 18 \times 0,01 = 13,44$$

.

L'espérance du nombre de voitures louées par jour est de 13,44.

2/ On calcule d'abord la variance de X :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = (11 - 13,44)^2 \times 0,10 + (12 - 13,44)^2 \times 0,17 + \cdots + (18 - 13,44)^2 \times 0,01 = 2,2864$$

Donc l'écart type associé est $\sqrt{V(X)} = \sqrt{2,2864} = 1,512$ (à 10^{-3} près).

3/ On calcule :

$$E(X) \times 20 - 300 = -31,20$$

Donc le bénéfice quotidien espéré est de -31,20 euros.

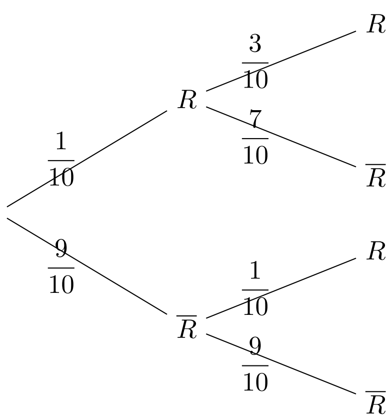
4/ D'après le résultat précédent, on voit que l'entreprise n'est pas rentable. Pour qu'elle le soit, on cherche à déterminer le prix T tel que $E(X) \times T - 300 > 0$.

$$E(X) \times T - 300 > 0 \Leftrightarrow 13,44T > 300 \Leftrightarrow T > 22,32$$

Pour être rentable, l'entreprise doit augmenter ses tarifs d'au moins 2,32 euros.

PARTIE 2

1/ On dessine l'arbre, en appelant R l'événement "La boule tirée est rouge".



On peut calculer :

$$p(A) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{100}$$

$$p(B) = \frac{1}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{7+9}{100} = \frac{16}{100}$$

2/ D'après la question précédente, la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	9	1	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{100 - 16 - 3}{100} = \frac{81}{100}$

3/ On calcule :

$$E(X) = 9 \times \frac{3}{100} + 1 \times \frac{16}{100} + (-1) \times \frac{81}{100} = -\frac{38}{100}$$

L'espérance mathématiques de X est donc de $-0,38$. On en déduit que ce n'est pas une bonne idée de jouer à ce jeu :)

4/ On sait que l'événement contraire de "Il pioche au moins une fois dans le sac S_2" est "Il ne pioche que dans le sac S_1". La probabilité de ne piocher que dans le sac S_1 lors d'une partie est de $\frac{9}{10}$.

On en déduit que la probabilité qu'il pioche au moins une fois dans le sac S_2 au cours des n parties est $p_n = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$.

5/ On résout :

$$\begin{aligned} p_n > 0,9 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n > 0,9 \\ &\Leftrightarrow 0,1 > \left(\frac{9}{10}\right)^n \\ &\Leftrightarrow \ln \frac{1}{10} > n \ln \frac{9}{10} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln \frac{1}{10}}{\ln \frac{9}{10}} < n \qquad \text{car } \ln \frac{9}{10} \text{ est négatif} \end{aligned}$$

Or, $\frac{\ln \frac{1}{10}}{\ln \frac{9}{10}} \simeq 21,85$, donc la plus petite valeur de n telle que $p_n > 0,9$ est 22.