I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog : https://19enmaths.fr/oral-3-inspecteur-finances-publiques/

II Coup de pouce

EXERCICE 1

1/ Supposer qu'il existe une solution $k \in \mathbb{Z}$, puis chercher à écrire $a_0 = k \times ....$

2/ Pour rappel, si k est une racine du polynôme P, alors $P = (X - K)Q$. Grâce à l'application de la question 1, on trouve facilement une racine de P. Ensuite, on utilisera la méthode de factorisation des polynômes de second degré, avec la sempiternelle formule de $b^2 - 4ac$.

EXERCICE 2

1/ Chercher, par équivalences successives, à démontrer que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2} \iff 0 \leq (a-b)^2$.

2/ Pour démontrer que $A \leq B$, on cherche à démontrer que $B - A$ est positif. Méthode à retenir dès qu'on vous demande une inégalité. Ca donne souvent beaucoup de calculs (pas ici), mais toujours le résultat cherché.

3/ a/ On passera par une démonstration par récurrence, qui est très simple ici grâce aux questions précédentes.

b/ Application de la question 2.

c/ Application de la question 2.

d/ Pour rappel, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. On applique donc un théorème fondamental pour démontrer qu'elles sont convergentes. Ensuite, en posant l_u et l_v, on obtient $l_u = l_v$ grâce à un calcul de limites.

III Correction

EXERCICE 1

1/ On suppose qu'il existe une solution $k \in \mathbb{Z}$ telle que $P(k) = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} P(k) = 0 &\iff k^n + a_{n-1}k^{n-1} + ... + a_1 k + a_0 = 0 \\ &\iff k^n + a_{n-1}k^{n-1} + ... + a_1 k = -a_0 \\ &\iff k(k^{n-1} + a_{n-1}k^{n-2} + ... + a_1) = -a_0 \end{aligned}$$

D'après cette dernière écriture, comme k et $k^{n-1} + a_{n-1}k^{n-2} + ... + a_1$ sont des entiers relatifs, on voit que k est un diviseur de $-a_0$.

On en déduit que si P admet une racine k dans $\mathbb{Z}$, alors cette racine divise a_0.

2/ On cherche à déterminer si il existe une racine dans $\mathbb{Z}$ de $X^3 - X^2 - 109X - 11$. D'après la question précédente, nécessairement cette racine serait un diviseur de 11, c'est à dire 1, -1, 11 et -11. De manière évidente, 1 et -1 ne sont pas racines de $X^3 - X^2 - 109X - 11$.

On calcule pour 11 : $11^3 - 11^2 - 109 \times 11 - 11 = 0$. Donc 11 est racine de $X^3 - X^2 - 109X - 11$.

On sait donc que $X^3 - X^2 - 109X - 11 = (X - 11)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + bX^2 + cX - 11aX^2 - 11bX - 11c$. Par identification, on a que $a = c = 1$, et que $b - 11 = -1$ ET $1 - 11b = -109$. Ces deux dernières écritures donnent $b = 10$.

On a donc :

$$X^3 - X^2 - 109X - 11 = (X - 11)(X^2 + 10X + 1)$$

De plus, on cherche à factoriser le polynôme de degré 2. On calcule :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times 1 = 96$$

$X^2 + 10X + 1$ admet donc deux racines réelles, qui sont $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10 + \sqrt{96}}{2} = -5 + 2\sqrt{6}$ et $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -5 - 2\sqrt{6}$.

On en déduit que la forme factorisée de $X^3 - X^2 - 109X - 11$ est $(X - 11)(X + 5 + 2\sqrt{6})(X + 5 - 2\sqrt{6})$.

EXERCICE 2

1/ Pour a et b tels que $0 < a \leq b$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} &\iff 2\sqrt{ab} \leq a+b \\
&\iff (2\sqrt{ab})^2 \leq (a+b)^2 \qquad \text{équivalent car les membres sont positifs} \\
&\iff 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \\
&\iff 0 \leq a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \\
&\iff 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\
&\iff 0 \leq (a-b)^2
\end{aligned}$$

Or, on sait que $0 \leq (a-b)^2$ est vraie pour tout a et b tels que $0 < a \leq b$. Par équivalences successives, on en déduit que, pour tout a et b tels que $0 < a \leq b$, $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

2/ On sait que, pour tout a et b tels que $0 < a \leq b$:
- $\dfrac{a+b}{2} - a = \dfrac{b-a}{2} \geq 0$ car $a \leq b$
- $\dfrac{a+b}{2} - b = \dfrac{a-b}{2} \leq 0$ car $a \leq b$
- $\dfrac{\sqrt{ab}}{a} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \geq 1$ car $a \leq b$
- $\dfrac{b}{\sqrt{ab}} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \geq 1$ car $a \leq b$

Donc on a bien :

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \qquad \text{et} \qquad a \leq \sqrt{ab} \leq b$$

3/ a/ Démontrons par récurrence : soit H l'hypothèse, définie sur $\mathbb{N}$, par $H(n)$: "$u_n \leq v_n$".
- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \leq v_0$. Donc $H(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose qu'il existe n tel que $H(n)$ soit vraie.
  On calcule $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n}$.
  Or, d'après la question 1, comme u_n et v_n sont deux entiers tels que $0 < u_n \leq v_n$, on sait que $\dfrac{u_n + v_n}{2} \geq \sqrt{u_n v_n}$. On en déduit que $u_{n+1} \leq v_{n+1}$.
- **Conclusion** : On en déduit par récurrence que H est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b/ On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Comme u_n et v_n sont deux réel tels que $0 < u_n \leq v_n$, on peut appliquer le résultat de la question 2 avec $a = u_n$ et $b = v_n$. On en déduit que $v_n \geq v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (v_n) est une suite décroissante.

c/ On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. Comme u_n et v_n sont deux réel tels que $0 < u_n \leq v_n$, on peut appliquer le résultat de la question 2 avec $a = u_n$ et $b = v_n$. On en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (u_n) est une suite croissante.

d/ On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.

Donc (u_n) est une suite croissante, et majorée par v_0. De même, (v_n) est une suite décroissante et minorée par u_0. On en déduit que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

On pose l_u la limite de la suite (u_n) et l_v la limite de la suite (v_n).

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on en déduit que $l_v = \dfrac{l_u + l_v}{2}$. On en déduit que $2l_v = l_u + l_v$, d'où $l_u = l_v$. Donc (u_n) et (v_n) admettent la même limite.