I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog : https://19enmaths.fr/oral-inspecteur-dgfip-2/

II Coup de pouce

EXERCICE 1

— Calculer tout d'abord U^n pour $n \in \mathbb{N}^*$
— Attention, dans un exercice de matrices, à bien énoncer pourquoi on peut utiliser le binôme de Newton
— Exercice très calculatoire, bien faire attention à toutes les étapes
— Deux astuces de calculs interviennent : $m = m + n - n$ et $m^{n-1} = \dfrac{m^n}{m}$.

EXERCICE 2

— Etant donné l'hypothèse faite dans l'exercice, on peut supposer que c'est grâce à une fonction "auxiliaire" de P qu'on peut répondre à la question. Laquelle ?
— Quels sont les théorèmes au programme qui permettent de démontrer qu'il existe un x tels que $f(x) = 0$? Principalement le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis.

III Correction

EXERCICE 1

Tout d'abord, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
— $I_3^n = I_3$;
— $U_3^n = 3^{n-1}U$;

De plus, I_3 et U_3 commutent (ie $I_3U_3 = U_3I_3$).
On calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (en appliquant le binôme de Newton puisque I_3 et U_3 commutent) :

$$
\begin{aligned}
M^n &= [(b-a)I_3 + aU_3]^n && (1)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (aU_3)^k[(b-a)I_3)]^{n-k} && (2)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k(b-a)^{n-k}U_3^k && (3)\\
&= (b-a)^nI_3 + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k(b-a)^{n-k}U_3^k && (4)\\
&= (b-a)^nI_3 + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k(b-a)^{n-k}3^{k-1}U_3 && (5)\\
&= (b-a)^nI_3 + U_3\frac{\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (3a)^k(b-a)^{n-k}}{3} && (6)\\
&= (b-a)^nI_3 + U_3\frac{\left[\left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (3a)^k(b-a)^{n-k}\right) - (b-a)^n\right]}{3} && (7)\\
&= (b-a)^nI_3 + \frac{(b-a+3a)^n}{3}U_3 - \frac{(b-a)^n}{3}U_3 && (8)\\
&= (b-a)^n(I_3 - \frac{1}{3}U_3) + \frac{(b+2a)^n}{3}U_3 && (9)
\end{aligned}
$$

Commentaire

— (3) et (4) : comme la somme est valable pour tout $k \geq 0$, et qu'on ne peut remplacer U_3^k que pour les valeurs de $k > 0$, on extrait le membre $k = 0$ de la somme.

— (6) : astuce de la forme $3^{k-1} = \dfrac{3^k}{3}$, ce qui permet de regrouper a^k et 3^k ensemble.

— (7) : astuce de la forme $\sum_{k=1}^{n} = \sum_{k=1}^{n} + m - m$, où m représente la valeur de $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (3a)^k (b-a)^{n-k}$ en $k = 0$.

Cela permet, en regroupant $\sum_{k=1}^{n} + m$, de revenir à $\sum_{k=0}^{n}$

Commentaire

Cet exercice, qui est franchement très calculatoire (et pourtant donné en concours...), nécessite, si on a le temps, une vérification rapide en prenant des nombres simples. Par exemple, on calcule pour $a = 1$, $b = 2$ et $n = 2$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Et avec la formule :

$$\begin{aligned} (b-a)^n (I_3 - \frac{1}{3} U_3) + \frac{(b+2a)^n}{3} U_3 &= (2-1)^2 (I_3 - \frac{1}{3} U_3) + \frac{(2+2)^2}{3} U_3 \\ &= I_3 - \frac{1}{3} U_3 + \frac{16}{3} U_3 \\ &= I_3 + 5U_3 \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans le cas où vous ne trouveriez pas la même chose, prenez le temps d'expliquer au jury tout de même votre raisonnement : il pourra vous indiquer ensuite le souci et vous aider à aller vers la solution.

EXERCICE 2

On sait que $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
P est un polynôme de degré n, donc admet des primitives.
Une primitive de P est Q définie par $Q(x) = a_0 x + \dfrac{a_1}{2} x^2 + \dfrac{a_2}{3} x^3 + ... + \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Or :

— $Q(0) = a_0 x + \dfrac{a_1}{2} \times 0^2 + \dfrac{a_2}{3} \times 0^3 + ... + \dfrac{a_n}{n+1} \times 0^{n+1} = 0$

— $Q(1) = a_0 \times 1 + \dfrac{a_1}{2} \times 1^2 + \dfrac{a_2}{3} \times 1^3 + ... + \dfrac{a_n}{n+1} \times 1^{n+1} = 0$ grâce à l'hypothèse de l'énoncé.

On sait que :

— Q est continue sur $[0; 1]$ (puisque c'est un polynôme de degré $n + 1$) ;

— Q est dérivable sur $[0; 1]$ (puisque c'est un polynôme de degré $n + 1$) ;

— $Q(0) = Q(1)$.

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $x \in]0; 1[$ tel que $Q'(x) = P(x) = 0$.