Oral 1, Inspecteur des Finances Publiques 2018

Par Dryss de "19 en Maths !", le 20 décembre 2017

I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog : https://19enmaths.fr/entrainement-1-oral-inspecteur/

II Coup de pouce

EXERCICE 1

On peut chercher à démontrer que chacune des propositions est équivalente à la 2.

— Démontrer que $3 \Longleftrightarrow 2$ est simplement un calcul sans difficulté majeure.

— Démontrer que $1 \Longleftrightarrow 2$ se fait en se rappelant que la mesure de l'angle orienté $(\to BA; \to BC)$ est donnée par $\dfrac{c-b}{a-b}$. Comme on suppose qu'on a un triangle équilatéral, il y a une égalité entre les angles orientés.

— Démontrer que $4 \Longleftrightarrow 2$ se fait en rappelant que $1+j+j^2=0$ et l'équivalence :
j ou j^2 sont solutions de $az^2+bz+c=0 \Longleftrightarrow (aj^2+bj+c)(a(j^2)^2+bj^2+c)=0$

EXERCICE 2

Première possibilité : Il faut démontrer que $5n^3+n$ est divisible par 2, et par 3. Ensuite, on fait une distinction de cas.

Deuxième possibilité : modifier l'écriture de $5n^3+n$ par une autre commençant par $6n^3+....$

III Correction

EXERCICE 1

Pour toute la résolution, on sait que $a-b\neq 0$, $a-c\neq 0$ et $b-c\neq 0$.

— <u>Démontrons que $1 \Longleftrightarrow 2$</u>
On suppose que ABC est un triangle équilatéral. On a donc

$$\frac{b-c}{a-c}=\frac{c-a}{b-a}=\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

On calcule, en prenant les deux premiers membres de cette égalité multiple :

$$\begin{aligned}\frac{b-c}{a-c}=\frac{c-a}{b-a} &\Longleftrightarrow (b-c)(b-a)=-(c-a)^2\\ &\Longleftrightarrow b^2-ab-cb+ac=-c^2-a^2+2ac\\ &\Longleftrightarrow b^2+c^2+a^2=ab+bc+ac\end{aligned}$$

De même, on démontre que $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{a-b}{c-b} \Longleftrightarrow b^2+c^2+a^2=ab+bc+ac$
On a bien que $1 \Longleftrightarrow 2$.

— <u>Démontrons que $3 \Longleftrightarrow 2$</u>
On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=0 &\Longleftrightarrow \frac{(b-c)(c-a)+(a-b)(c-a)+(a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0\\ &\Longleftrightarrow (b-c)(c-a)+(a-b)(c-a)+(a-b)(b-c)=0\\ &\Longleftrightarrow bc-ab-c^2+ac+ac-a^2-bc+ab+ab-ac-b^2+bc=0\\ &\Longleftrightarrow bc+ac+ab-a^2-b^2-c^2=0\\ &\Longleftrightarrow bc+ac+ab=a^2+b^2+c^2\end{aligned}$$

On a bien que $3 \Longleftrightarrow 2$.

— <u>Démontrons que $4 \Longleftrightarrow 2$</u>
Pour résoudre cette question, on rappelle que $1+j+j^2=0$, ou encore que $j+j^2=-1$.
On résout :

$$
\begin{aligned}
j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de } az^2+bz+c=0 &\iff (aj^2+bj+c)(a(j^2)^2+bj^2+c)=0\\
&\iff (aj^2+bj+c)(aj+bj^2+c)=0\\
&\iff a^2j^3+abj+acj^2+baj^2+b^2j^3+bcj+caj^+cbj^2+c^2j^3=0\\
&\iff a^2+b^2+c^2+j(ab+ac+cb)+j^2(ab+ac+cb)=0\\
&\iff a^2+b^2+c^2+(j+j^2)(ab+ac+bc)=0\\
&\iff a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)=0\\
&\iff a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc
\end{aligned}
$$

Donc $4 \iff 2$.
Comme $1 \iff 2$, $3 \iff 2$ et $4 \iff 2$, on a bien que les quatre propositions sont équivalentes.

EXERCICE 2, EN UTILISANT UNE DISTINCTION DE CAS

On sait qu'un nombre est divisible par 6 si et seulement si il est divisible par 2 et 3.

- Démontrons que $5n^3+n$ est divisible par 2 pour tout n relatif :
  - On suppose que $n \equiv 0[2]$ (ie n est pair) : $n \equiv 0[2]$, donc $n^3 \equiv 0^3 \equiv 0[2]$ et $5n^3 \equiv 5 \times 0 \equiv 0[2]$.
    On en déduit $5n^3+n \equiv 0+0 \equiv 0[2]$.
  - On suppose que $n \equiv 1[2]$ (ie n est impair) : $n \equiv 1[2]$, donc $n^3 \equiv 1^3 \equiv 0[2]$ et $5n^3 \equiv 5 \times 1 \equiv 5 \equiv 1[2]$.
    On en déduit $5n^3+n \equiv 1+1 \equiv 0[2]$.

  On peut donc conclure que, pour tout n relatif, $5n^3+n$ est divisible par 2.
- Démontrons que $5n^3+n$ est divisible par 3 pour tout n relatif :
  - On suppose que $n \equiv 0[3]$: $n \equiv 0[3]$, donc $n^3 \equiv 0^3 \equiv 0[3]$ et $5n^3 \equiv 5 \times 0 \equiv 0[3]$.
    On en déduit $5n^3+n \equiv 0+0 \equiv 0[3]$.
  - On suppose que $n \equiv 1[3]$: $n \equiv 1[3]$, donc $n^3 \equiv 1^3 \equiv 0[3]$ et $5n^3 \equiv 5 \times 1 \equiv 5 \equiv 2[3]$.
    On en déduit $5n^3+n \equiv 1+2 \equiv 0[3]$.
  - On suppose que $n \equiv 2[3]$: $n \equiv 2[3]$, donc $n^3 \equiv 2^3 \equiv 8 \equiv 2[3]$ et $5n^3 \equiv 5 \times 2 \equiv 10 \equiv 1[3]$.
    On en déduit $5n^3+n \equiv 2+1 \equiv 0[3]$.

  On peut donc conclure que, pour tout n relatif, $5n^3+n$ est divisible par 3.

Comme, pour tout n relatif, $5n^3+n$ est divisible par 2 et par 3, on en déduit qu'il est divisible par 6 pour tout n relatif.

EXERCICE 2, AVEC UNE ASTUCE D'ÉCRITURE

On sait que :

$$
\begin{aligned}
5^3+n &= 6n^3+n-n^3\\
&= 6n^3+n(1-n^2)\\
&= 6n^3+n(1-n)(1+n)\\
&= 6n^3-n(n-1)(n+1)
\end{aligned}
$$

Or, on sait que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par trois. De même, le produit de deux entiers consécutifs est divisible par 2. Donc, pour tout entier relatif n, $n(n-1)(n+1)$ est divisible par 2 et par 3, donc par 6.
D'où $6n^3-n(n-1)(n+1)$ est divisible par 6 pour tout n entier relatif. On en déduit que $5n^3+n$ est divisible par 6 pour tout n entier relatif.