Par Dryss de "19 en Maths !", le 11 décembre 2017

I Sujet

Soit 8 points de l'espace orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ définis comme suit :

$A(\alpha_1;\alpha_1;\alpha_1)$ $B(\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1;\alpha_1)$ $C(\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1)$ $D(\alpha_1;\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1)$ $E(\alpha_1;\alpha_1;\alpha_1+\alpha_2)$ $F(\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1;\alpha_1+\alpha_2)$ $G(\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1+\alpha_2)$ $H(\alpha_1;\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1+\alpha_2)$

Avec α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

1/ Montrer que $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont orthogonaux.

2/ Montrer que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux.

3/ Que peut-on en déduire à ce stade de la figure formée par $EFGH$?

4/ Soit I le milieu de $[EG]$. Montrer que $I \in (HF)$.

5/ Montrer que $||\overrightarrow{IH}||$ et $||\overrightarrow{IE}||$ sont égaux.

6/ Que peut-on déduire de la nature de $EFGH$ pour tout α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$?

7/ Que déduit-on du quadrilatère $ABCD$?

À partir de maintenant, on considère que $\alpha_1 = 0$ et que si $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$, alors $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$

8/ Montrer que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont égaux.

9/ Montrer que $||\overrightarrow{AE}||$ et $||\overrightarrow{AB}||$ sont égaux.

10/ On considère que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux. Que peut-on déduire sur la nature de la figure $ABCDEFGH$?

II Correction

Pour toutes les questions, on fixe α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

1/ On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{EG}$:

$$(x_G - x_E; y_G - y_E; z_G - z_E) = (\alpha_1+\alpha_2-\alpha_1; \alpha_1+\alpha_2-\alpha_1; \alpha_1+\alpha_2-(\alpha_1+\alpha_2)) = (\alpha_2;\alpha_2;0)$$

.
Avec la même méthode, on trouve que les coordonnées de $\overrightarrow{HF}$ sont $(\alpha_2;-\alpha_2;0)$.
On calcule :

$$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{HF} = xx' + yy' + zz' = \alpha_2\times\alpha_2 + \alpha_2\times(-\alpha_2) + 0\times 0 = 0$$

Donc $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont orthogonaux.

2/ Grâce à un calcul similaire de coordonnées, on voit que $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $(\alpha_2;0;0)$ et que $\overrightarrow{HG}$ a pour coordonnées $(\alpha_2;0;0)$. On en déduit que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux.

3/ On sait que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux, donc le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.
Comme le parallélogramme $EFGH$ a ses diagonales perpendiculaires d'après la question 1, alors $EFGH$ est un losange.

4/ Comme I est le milieu de $[EG]$, alors ses coordonnées sont

$$\left(\frac{x_G+x_E}{2};\frac{y_G+y_E}{2};\frac{z_G+z_E}{2}\right) = \left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2};\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2};\alpha_1+\alpha_2\right)$$

Or, une équation paramétrique de (HF), donnée par les coordonnées du point H et un vecteur directeur $\overrightarrow{HF}$ est $\left\{\begin{array}{ll}\alpha_1+\alpha_2 & +\lambda\alpha_2\\ \alpha_1 & -\lambda\alpha_2\\ \alpha_1+\alpha_2 & \end{array}\right.$. Or, on voit que pour $\lambda = \frac{1}{2}$, on retrouve les coordonnées de I.
Donc $I \in (HF)$.

Commentaire

Si on veut torpiller cette question sans calcul (et faire un peu de géométrie de niveau collège !), on peut simplement dire qu'un parallélogramme a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux. Comme I est le milieu de $[EG]$, alors c'est aussi le milieu de $[FH]$.

5/ Par calcul, on obtient que les coordonnées de $\overrightarrow{IH}$ sont $\left(\frac{-\alpha_2}{2};\frac{\alpha_2}{2};0\right)$ et celles de $\overrightarrow{IE}$ sont $\left(\frac{-\alpha_2}{2};\frac{-\alpha_2}{2};0\right)$.

On calcule :

$||\overrightarrow{IH}|| = \sqrt{\left(\frac{-\alpha_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{2(\alpha_2)^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}\alpha_2}{2}$ (car α_2 est positif).

De même, $||\overrightarrow{IE}|| = \frac{\sqrt{2}\alpha_2}{2}$

Donc $||\overrightarrow{IE}||$ et $||\overrightarrow{IH}||$ sont égaux.

6/ On sait que (EG) et (FH) se coupent en un point I. De plus, (EF) est parallèle à (GH). D'après le théorème de Thalès, on en déduit que $\frac{EF}{GH} = \frac{EI}{IG} = \frac{FI}{IH}$. Or, $EI = IG$, d'où $\frac{FI}{IH} = 1$. On a donc $FI = IH$.

Comme $FI = IH = EI = IG$, on voit que les diagonales du losange $EFGH$ sont de même longueur. Donc $EFGH$ est un carré.

Commentaire

Si on se souvient du fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux, le résultat de la question précédente montre directement que les diagonales sont de même longueur.

7/ On remarque que les coordonnées des points A, B, C et D sont similaires à celles des point E, F, G et H. Les propriétés se transfèrent donc, et on peut déduire que $ABCD$ est un carré.

8/ Par calcul, on obtient les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$ qui sont $(0;0;\alpha_2)$. De même, celles de $\overrightarrow{BF}$ sont $(0;0;\alpha_2)$.

Donc $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont égaux.

9/ Comme $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $(0;0;\alpha_2)$, on peut calculer directement $||\overrightarrow{AE}|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (\alpha_2)^2} = \alpha_2$ (sans valeur absolue car α_2 est positif).

De même, après calcul, on a que $||\overrightarrow{AB}|| = \alpha_2$.

Donc $||\overrightarrow{AE}||$ et $||\overrightarrow{AB}||$ sont égaux.

10/ On sait que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ donc $AEFB$ est un parallélogramme.

De plus, $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{EF}$. Donc $AEFB$ est un rectangle.

Enfin, $AE = AB$. Donc $AEFB$ est un carré.

Comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$, alors $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$, et que $ABCD$, $EFGH$ et $AEFB$ sont des carrés ayant la même longueur de côté, on en déduit que toutes les faces de cette figure sont des carrés.

Donc $ABCDEFGH$ est un cube.