Correction Exercice 4, Contrôleur des Finances Publiques 2018

Par Dryss de "19 en Maths !", le 11 décembre 2017

I Sujet

1/ Résoudre l'inégalité suivante : $\ln(x^2-5x-14) \geq \ln(2x^2-10x+8)$

2/ Déterminer une primitive de la fonction suivante : Pour $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = 6\sin(2x)\cos^3(2x)$.

3/ On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, par $f(x) = \ln x - x$

a/ Etudier les variations de f sur $[1; +\infty[$

b/ Déduire que pour tout $x \geq 1$, on a $0 \leq \ln x < x$.

c/ Prouver que pour tout $x \geq 1$, on a $0 \leq \dfrac{\ln x}{2x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

d/ Calculer $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

4/ Soit les deux intégrales définies par :

$$I = \int_0^\pi e^x \sin x \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^\pi e^x \cos x \mathrm{d}x$$

a/ Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^\pi + 1$.

b/ En déduire les valeurs exactes de I et J.

II Correction

1/ On résout (on remarquera qu'il n'y a pas d'équivalence) :

$$\begin{aligned}\ln(x^2-5x-14) \geq \ln(2x^2-10x+8) &\Rightarrow x^2-5x-14 \geq 2x^2-10x+8\\ &\Rightarrow \ln(x^2-5x-14) \geq \ln(2x^2-10x+8)\\ &\Rightarrow 0 \geq x^2-5x+22\end{aligned}$$

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 22 = 25 - 88 = -63$. Donc Δ est négatif, donc $x^2-5x+22$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $x^2-5x+22$ est toujours positif (alors qu'on souhaitait trouver les valeurs négatives). On en déduit que $\ln(x^2-5x-14) \geq \ln(2x^2-10x+8)$ n'a pas de solution.

2/ On utilise une intégration par parties.
k est de la forme $3uv'$ avec u la fonction $x \mapsto \cos^3(2x)$ (de dérivée $x \mapsto -6\cos^2(2x)\sin(2x)$), et v' la fonction $x \mapsto 2\sin(2x)$ (dont une primitive est $x \mapsto -\cos(2x)$).
On appelle K_a la primitive de k qui s'annule en un réel a fixé. On calcule, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}K_a(x) = \int_a^x k(t)\mathrm{d}t = 3\int_a^x 2\sin(2t)\cos^3(2t)\mathrm{d}t\\ &= 3[\cos^3(2t) \times (-\cos(2t))]_a^x - 3\int_a^x (-6)\cos^2(2t)\sin(2t)(-\cos(2t))\mathrm{d}t\\ &= [-3\cos^4(2t)]_a^x + -3K(x)\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4K_a(x) = [-3\cos^4(2t)]_a^x$, ou encore $K_a(x) = \dfrac{-3}{4}[\cos^4(2t)]_a^x = \dfrac{-3}{4}(\cos^4(2x) - \cos^4(2a)]$.

En prenant $a = \dfrac{\pi}{4}$, on obtient la primitive suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K_{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-3}{4}\cos^4(2x)$.

3/ On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, par $f(x) = \ln x - x$

a/ On sait que cette fonction est composée de fonctions dérivables pour tout $x \in [1; +\infty[$, donc est dérivable sur cet ensemble.
On dérive, pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On en déduit aisément que f' est négative sur $[1; +\infty[$, donc que f est décroissante sur $[1; +\infty[$.

b/ Comme f est décroissante sur $[1;+\infty[$, on a, pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) \leq f(1)$. D'où :

$$f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \ln x - x \leq -1 \Leftrightarrow \ln x + 1 \leq x$$

On en déduit que $\ln x < x$ (strictement). De plus, comme pour tout $x \in [1;+\infty[$, on a $0 \leq \ln x$, on a bien que, pour tout $x \in [1;+\infty[$, $0 \leq \ln x < x$.

c/ On sait que, pour tout $X \geq 1$, on a $0 \leq \ln X < X$.
On pose $X = \sqrt{x}$. On a donc, pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
0 \leq \ln X < X &\Longleftrightarrow 0 \leq \ln \sqrt{x} < \sqrt{x} \\
&\Longleftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x} \\
&\Longleftrightarrow 0 \leq \frac{\ln x}{2x} < \frac{\sqrt{x}}{x} \qquad \text{ne change pas de signe car } x \text{ est positif} \\
&\Longleftrightarrow 0 \leq \frac{\ln x}{2x} < \frac{1}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

d/ On sait que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Par encadrement (appelé théorème des gendarmes), on en déduit que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{2x} = 0$, ou encore que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

4/ a/ On utilise une intégration par parties sur l'intégrale I.

— Si on considère que I est de la forme uv' avec u la fonction $x \mapsto e^x$ (de dérivée $x \mapsto e^x$), et v' la fonction $x \mapsto \sin x$ (dont une primitive est $x \mapsto -\cos x$), alors on peut calculer :

$$I = \int_0^\pi \sin x e^x \mathrm{d}x = -[e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x e^x \mathrm{d}x = -(e^\pi \cos \pi - e^0 \cos 0) + J = e^\pi + 1 + J$$

— Si on considère que I est de la forme uv' avec u la fonction $x \mapsto \sin x$ (de dérivée $x \mapsto \cos x$), et v' la fonction $x \mapsto e^x$ (dont une primitive est $x \mapsto e^x$), alors on peut calculer :

$$I = \int_0^\pi \sin x e^x \mathrm{d}x = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x e^x \mathrm{d}x = (e^\pi \sin \pi - e^0 \sin 0) - J = 0 - 0 - J = -J$$

On a bien que $I = -J$ et que $I = J + e^\pi + 1$.

b/ On sait que $I = -J$ et $I = J + e^\pi + 1$. Donc $-J = J + e^\pi + 1 \Longleftrightarrow 2J = -e^\pi - 1$. On a donc que $J = \frac{-1 - e^\pi}{2}$ et $I = -J = \frac{1 + e^\pi}{2}$.