Fonctions, Contrôleur des Finances Publiques

Par Dryss de 19 en Maths !, le 2 décembre 2017

I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog : https://19enmaths.fr/fonctions-exercice-6-annales-de-concours/

II Coup de pouce

1/ Etude des limites

a/ Pas de difficulté dans cette limite si on y va pas à pas.

b/ De même.

c/ Lorsqu'on obtient des limites finies, on en déduit la présence d'asymptotes horizontale ou verticales. Il peut aussi y en avoir des obliques, mais dans ce cas l'énoncé posera plusieurs questions intermédiaires pour vous amener à ce résultat.

2/ Etude des variations de la fonction f

a/ Toujours préciser pourquoi la fonction est dérivable ! Tout correcteur digne de ce nom attend les mathématiciens au tournant sur cette question !

Ici, quand on aborde le calcul (qui n'est pas évident !), surtout bien prendre le temps d'écrire les fonctions en jeu. On évitera comme ça les erreurs de calcul (comme moi en tapant ce corrigé !).

b/ Question simple, le signe ne varie pas.

c/ Le fameux théorème des valeurs intermédiaires !

3/ Ne pas oublier de tracer tout ce qui a été trouvé dans les questions précédentes : les asymptotes, le point particulier.

III Correction

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthornormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. L'unité graphique est 1cm.

1/ Etude des limites

a/ On sait que $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, d'où :

— $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

— $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

On en déduit que, par multiplication, $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x) = +\infty$.

b/ Comme on sait que $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, on en déduit par un raisonnement analogue à la question précédente que $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = 0^+$.

c/ Les deux questions précédentes nous indiquent que la courbe $\mathcal{C}$ admet :

— Une asymptote verticale, en 0, d'équation $x = 0$ (ie l'axe des ordonnées) ;

— Une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = 0$ (ie l'axe des abscisses).

2/ Etude des variations de la fonction f

a/ On sait que f est composée de fonctions dérivables pour tout x réel strictement positif, donc par composition elle est dérivable pour tout x réel strictement positif.

On calcule, pour tout x réel strictement positif :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2x}{x^4} \times e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \times -\frac{1}{x^2} \\ &= -e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^4} \times 2x + \left(e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^4}\right) \\ &= -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1) \end{aligned}$$

AU BROUILLON

On voit que f est de la forme $u \times v$

Donc $f' = u'v + uv'$

$u = \frac{1}{x^2}$ qui est de la forme $\frac{1}{g}$

avec $g = x^2$

donc $u' = -\frac{g'}{g^2} = -\frac{2x}{(x^2)^2} = -\frac{2x}{x^4}$

$v = e^{\frac{1}{x}}$ qui est de la forme $h(g(x))$

avec $h(x) = e^x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

Comme $h'(x) = e^x$ et $g(x) = -\frac{1}{x^2}$

On a $v' = h'(g(x)) \times g'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \times -\frac{1}{x^2}$

b/ On sait que, pour tout x réel strictement positif :

— $\frac{1}{x^4}$ est toujours positif (puisque la puissance de x est paire) ;

— $e^{\frac{1}{x}}$ est toujours positif (car $x \mapsto e^x$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$) ;

— $x > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow 2x + 1 > 1$ donc $2x + 1 > 0$.

On en déduit que f' est négative pour tout x réel strictement positif (et oui, attention au signe moins dans la dérivée).

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0

c/ On découpe l'ensemble de définition de f en trois parties : $]0;1] \cup [1;2] \cup [2;+\infty[$. On sait que :

— $f(1) = \frac{1}{1^2}e^{\frac{1}{1}} = e \simeq 2,7$, donc $f(1) > 2$. Comme f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on sait qu'il n'existe aucun réel α dans $]0;1]$ tel que $f(\alpha) = 2$.

— $f(2) = \frac{1}{2^2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{0,5}}{4} \simeq 0,4$, donc $f(2) < 2$. Comme f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on sait qu'il n'existe aucun réel α dans $[2;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

— Enfin, on sait que f est continue sur $[1;2]$ (puisque composée de fonctions continues sur cet intervalle), strictement décroissante sur $[1;2]$, que $f(1) > 2$ et que $f(2) < 2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe un unique α dans $[1;2]$ tel que $f(\alpha) = 2$.

Enfin, grâce à une calculatrice, on peut observer que $1,109 < \alpha < 1,110$. On en déduit qu'un arrondi au centième de α est $1,11$.

Commentaire

Dans la plupart des corrections que vous pourriez trouver, on fait abstraction de cette séparation du domaine de définition. En effet, on pourrait directement dire que les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires sont vérifiées en utilisant les bornes de $]0;+\infty[$.

1/ f est bien continue sur cet intervalle ;

2/ f est bien strictement décroissante sur cet intervalle ;

3/ $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) > 2$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) < 2$.

Seulement, ce théorème s'appelle "Le théorème des valeurs intermédiaires généralisé" puisque les bornes ne sont pas des réels pour lesquels la fonction f est définie. Et il ne me semble pas prudent de l'utiliser en exercice puisqu'il n'est pas vraiment explicite dans le programme. Mais c'est peut-être l'ancien prof de maths un brin psychorigide qui parle, je ne pense pas qu'on vous en tienne rigueur si vous l'utilisez :)

3/ Grâce aux deux asymptotes, et au point particulier de coordonnées $(\alpha; 2)$, on peut tracer la courbe :