Fonctions, Contrôleur des Finances Publiques 2017

Par Dryss de "19 en Maths !", le 20 novembre 2017

I Sujet

Cet exercice a pour but d'étudier la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x+2+\ln x}{x}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est représentative de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

PARTIE I : LIMITES, ASYMPTOTES, VARIATIONS

1. Limites
   a/ Calculer la limite de f en 0^+.
   b/ Vérifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$.
   c/ Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Asymptotes
   a/ En déduire l'existence de deux asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$. On appellera d l'asymptote verticale et d' l'asymptote horizontale.
   b/ Donner les équations de ces deux droites.
3. Sens de variation
   On appellera f' la fonction dérivée de f.
   a/ Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}$.
   b/ Montrer que f' s'annule en e^{-1} en changeant de signe.
   c/ Déterminer la valeur de $f(e^{-1})$.
   d/ Dresser le tableau de variations de f.

PARTIE II : POSITION RELATIVE

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$par $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$ et $\mathcal{H}$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit K le point d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$.

1. Étude de la fonction g.
   a/ Étudier les limites de g en 0^+ et $+\infty$.
   b/ Déterminer g', fonction dérivée de g.
   c/ Dresser le tableau de variations de g.
2. Étude de $f(x) - g(x)$.
   a/ Calculer $f(x) - g(x)$.
   b/ Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
   c/ En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{H}$ à l'aide d'un tableau.
3. Donner les coordonnées exactes du point K.

PARTIE III : CALCUL D'UNE AIRE

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$, et par les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

1. Soit P la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $P(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. Vérifier que P est une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2.

II Coup de pouce

On peut résoudre la plupart des questions de cet exercice grâce à la maitrise des techniques de base pour les fonctions, à savoir :

- la dérivation ;
- l'étude de signe ;
- les études de limite ;
- les opérations avec du calcul littéral ;
- les intégrales.

PARTIE I : LIMITES, ASYMPTOTES, VARIATIONS

1. a/

   b/

   c/ Le théorème des croissances comparées permet de lever l'indétermination
2. a/ Pour ma correction, j'ai lié les deux questions a et b ! Je ne vois pas très bien pourquoi on doit distinguer les deux alors que la second donne directement la première.

   b/
3. a/

   b/

   c/

   d/

PARTIE II : POSITION RELATIVE

1. a/

   b/

   c/
2. a/

   b/

   c/
3.

PARTIE III : CALCUL D'UNE AIRE

1. Il suffit de dériver P et de remarquer qu'on obtient $\dfrac{\ln x}{x}$ pour dire que P est UNE primitive (et non LA primitive) de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
2. Attention à deux choses : bien vérifier que $\mathcal{C}$ ne passe pas au dessus et en dessous de $\mathcal{H}$ sur l'intervalle considéré, et se rappeler que l'intégrale donne un résultat en "unité d'aire", autrement dit pas directement en "cm^2".

III Correction

PARTIE I : LIMITES, ASYMPTOTES, VARIATIONS

1. a/ On sait que
   - $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x+2 = 2^+$
   - $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \ln x = -\infty$
   - $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

   Par composition des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x) = -\infty$

   b/ On calcule, pour tout $x \in]0;+\infty[$:
   $f(x) = \dfrac{x+2+\ln x}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

   c/ On sait que :
   - $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 1 + \dfrac{2}{x} = 1$
   - Grâce au théorème des croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

   Par addition, on en déduit que $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = 1$

2. On sait que la limite en 0 de f est $-\infty$. On en déduit que $\mathcal{C}$ admet comme asymptote la droite verticale d'équation $x = 0$.
   De même, on sait que la limite de f en $+\infty$ est 1. On en déduit que $\mathcal{C}$ admet comme asymptote horizontale la droite d'équation $y = 1$.

3. a/ On sait que f est composée de fonction dérivable sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   On calcule, pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + \frac{-2}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}x - \ln x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{-2+1-\ln x}{x^2} \\ &= \frac{-1-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

   b/ On étudie :
   - x^2 est positif pour tout $x \in]0;+\infty[$.
   - $-1-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow -1 \geq \ln x \Leftrightarrow e^{-1} \geq x$
   - $-1-\ln x \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \ln x \Leftrightarrow e^{-1} \leq x$

   Donc on voit bien que f' s'annule et change de signe pour $x = e^{-1}$.

   c/ On calcule :

$$\begin{aligned} f(e^{-1}) &= \frac{e^{-1}+2+\ln e^{-1}}{e^{-1}} \\ &= (e^{-1}+2-1)\times e \\ &= 1+e \end{aligned}$$

   d/ On dresse le tableau de variations :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$-1-\ln x$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Sens de Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}$	$\searrow$	1

PARTIE II : POSITION RELATIVE

1. a/ On sait que $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$. On en déduit que $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} g(x) = 1^+$

   b/ On sait que g est composée de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, donc g est dérivable sur $]0;+\infty[$. On calcule, pour $x \in]0;+\infty[$: $g'(x) = 0 - \dfrac{2}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2}$.

   c/ On dresse le tableau de variations de g :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
x^2	$+$
$g'(x)$	$-$
Sens de Variation de g	$+\infty \searrow 1$

2. a/ On calcule, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f(x) - g(x) = 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x} - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$

   b/ On dresse le tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	

   c/ Grâce au tableau de signe, on déduit que $\mathcal{C}$ est au dessous de $\mathcal{H}$ pour $x \in]0;1[$ et au dessus de $\mathcal{H}$ pour $x \in]1;+\infty[$.

3. On calcule : $g(1) = 1 + \dfrac{2}{1} = 3$. On en déduit que K a pour coordonnées $(1;3)$.

PARTIE III : CALCUL D'UNE AIRE

1. P est composée de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, donc est dérivable $]0;+\infty[$.

   On calcule, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $P'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \ln x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{x}$

   On en déduit que P est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

2. On sait que, pour tout $x \in]1;e^2[$, $g(x) \geq f(x) \geq 0$.

   Donc l'aire $\mathcal{A}$ est donnée par $\displaystyle\int_1^{e^2} f(x)\mathrm{d}x - \int_1^{e^2} g(x)\mathrm{d}x = \int_1^{e^2} f(x) - g(x)\mathrm{d}x$. On calcule :

$$\int_1^{e^2} f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = [P(x)]_1^{e^2} = \frac{1}{2}(\ln e^2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = 2$$

   L'aire $\mathcal{A}$ mesure donc 2 unités d'aire. Or, l'unité graphique étant 2 cm, chaque unité d'aire vaut 4cm^2. On en déduit que $\mathcal{A}$ vaut 8cm^2.