Suites, Contrôleur des Finances Publiques 2015

Par Dryss de "19 en Maths !", le 19 novembre 2017

I Sujet

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.
3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminez sa limite.
5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
6. Soit $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
   Déterminez l'expression de S_n, puis l'expression de T_n en fonction de n.
7. Déterminez $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} T_n$

II Coup de pouce

1. Pas de soucis pour cette question
2. Il faut effectuer une démonstration par récurrence, qui est simple ici
3. Toujours la même technique pour démontrer qu'une suite est décroissante, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
4. Reprendre les résultats des questions 2 et 3 pour démontrer qu'elle converge, puis étudier les points fixes de $f(x) = \dfrac{x+4}{3}$ pour déterminer la limite.
5. Démontrer qu'une suite (v_n) est géométrique revient soit à trouver comment écrire v_{n+1} en fonction de v_n (demande souvent du feeling), soit de prouver que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est constante pour tout n (plus calculatoire, souvent long, mais ça marche très bien).
6. Se rappeler de la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.
7. L'étude de signe se fait sans problème majeur

III Correction

1/ On sait que $3u_{n+1} = u_n + 4$, ou encore $u_{n+1} = \dfrac{u_n+4}{3}$. On calcule :

- $u_0 = 5$
- $u_1 = \dfrac{u_0+4}{3} = \dfrac{5+4}{3} = 3$
- $u_2 = \dfrac{u_1+4}{3} = \dfrac{3+4}{3} = \dfrac{7}{3}$

2/ Démontrons par récurrence : Soit $P(n)$ la propriété "$u_n \geq 2$" définie pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : On sait que $u_0 = 5$. Donc $u_0 \geq 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

On suppose qu'il existe un entier k tel que $P(k)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_k \geq 2 &\Leftrightarrow u_k + 4 \geq 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{u_k+4}{3} \geq 2 \\ &\Leftrightarrow u_{k+1} \geq 2 \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Comme P est héréditaire et que $P(0)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout n entier.

3/ On calcule $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n+4}{3} - u_n = \dfrac{-2u_n+4}{3}$. Or, comme pour tout n entier, $u_n \geq 2$, $-2u_n + 4 \leq 0$. Par conséquent, on a que $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Donc (u_n) est décroissante.

4/ On sait que (u_n) est une suite décroissante et minorée. Grâce au théorème de la convergence monotone, on en déduit que (u_n) admet une limite l.

Comme (u_n) est définie de manière récurrente, on sait que l vérifie $l = \dfrac{l+4}{3}$.

$$l = \frac{l+4}{3} \Leftrightarrow 3l = l + 4 \Leftrightarrow 2l = 4 \Leftrightarrow l = 2$$

Donc (u_n) tend vers 2.

5/ On calcule :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= \frac{u_n+4}{3} - 2 \\ &= \frac{u_n+4-6}{3} \\ &= \frac{u_n-2}{3} \\ &= \frac{v_n}{3} \end{aligned}$$

On peut donc conclure que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$. On peut en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

6/ On sait que (v_n) est une suite géométrique. Donc :

$$S_n = v_0 \times \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 3 \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{9}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

De plus, on sait que :

$$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 - 2 + u_1 - 2 + \cdots + u_n - 2 + 2n = S_n + 2n = \frac{9}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + 2n$$

7/ Calculons les limites :

- $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 1$ d'où $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{9}{2} \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \dfrac{9}{2}$
- De plus, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 2n = +\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} S_n = \dfrac{9}{2}$ et que, par somme, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} T_n = +\infty$.