I Sujet

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE I

Monsieur BINGO, le directeur du casino de la commune LINGO, a été sensibilisé par son banquier sur le nombre de faux billets en circulation : 2 % des billets en circulation sont de faux billets. Afin de lutter contre cette fraude, il décide de s'équiper d'une machine à détecter les faux billets. Monsieur BINGO se renseigne sur la fiabilité de cet appareil et découvre les propriétés suivantes :

— Si le billet est faux : la probabilité qu'il soit détecté comme faux est 0,99.
— Si le billet est vrai, la probabilité qu'il soit détecté comme vrai est 0,97.

Une marge d'erreur existe donc : un vrai billet peut être détecté comme faux, et vice-versa. Pour se convaincre de sa bonne acquisition, Monsieur BINGO demande au vendeur d'effectuer un essai avec un billet quelconque.

On note :
— F l'événement "Le billet est faux".
— T l'événement "La machine a détecté un faux billet".
— $\overline{F}$ et $\overline{T}$ sont les événements contraires de F et T.

1/ a/ Déterminer la probabilité de $p(F)$,$p_F(T)$ et $p_{\overline{F}}(\overline{T})$. Élaborer un arbre de probabilités.
b/ En déduire la probabilité de l'événement $F \cap T$.

2/ Démontrer que la probabilité que la machine détecte un faux billet est de 0,0492.

3/ Justifier par le calcul que : si la machine détecte un faux billet, il n'y a que 40 % de chance que le billet soit faux.

4/ Déterminer la probabilité que le billet soit vrai sachant qu'il n'a pas été détecté comme faux billet.

5/ Les événements F et T sont-ils indépendants ?

6/ Monsieur BINGO achète finalement l'appareil. Selon vous, fait-il une bonne acquisition ?

PARTIE II

Un joueur se rend dans le casino de Monsieur BINGO et joue à la roulette. En laçant la roulette, il tombe sur un nombre aléatoire entre 0 et 36. Il mise 10 euros.

— S'il tombe sur un nombre pair sauf 0, il récupère sa mise et gagne 2 autres euros (gain de 2 euros).
— S'il tombe sur un nombre impair, il perd sa mise (perte de 10 euros).
— S'il tombe sur le chiffre 0 : il récupère sa mise et gagne 20 autres euros (gain de 20 euros).

On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur (une perte sera donc négative).

1. Déterminer la loi de probabilité que suit X.
2. Donner l'espérance de X, notée $E(X)$.
3. Le jeu est-il favorable au joueur ?

II Coup de pouce

Avant tout, je rappelle que par convention, on arrondi les résultats de probabilités à 4 chiffres après la virgule.

PARTIE I

1/ a/ Au brouillon, tracer d'abord l'arbre, ensuite les probabilités demandées se lisent dessus !
b/ Rappel de formule (dites de Bayes) : $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$.

2/ Il faut utiliser la formule des probabilités totales : $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p_B(A) + p_{\overline{B}}(A)$.

3/ On utilise encore la formule de Bayes.

4/ On utilise encore encore la formule de Bayes (en probabilités, elle est vraiment très fréquente !)

5/ Deux événements sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. Autrement dit, c'est un cas particulier de la formule de Bayes qui revient à dire que $P_B(A) = p(A)$, ou encore que B n'influe pas sur A.

6/ Aucune aide à donner, à vous de voir s'il vous faut 100% de réussite pour être heureux ou si la probabilité trouvée vous satisfait.

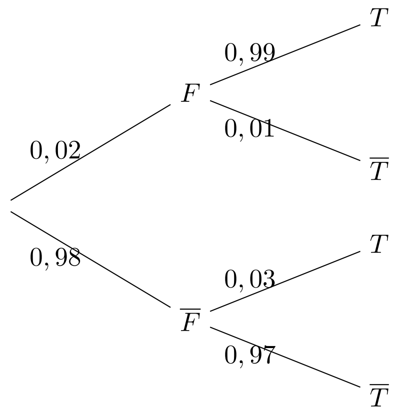
PARTIE II

Deuxième convention importante lorsque des fractions interviennent dans un exercice de probabilités, on essaye de garder le même dénominateur pour toutes les fractions de l'exercice. Tout simplement parce qu'on est souvent amené à les additionner (et ce n'est faisable que lorsque les dénominateurs sont identiques !). Alors oui, parfois, on ne les simplifie pas.

1. Déterminer la loi de probabilité, c'est tout simplement donner un tableau qui reprend toutes les valeurs possibles de la variable aléatoire, en leurs associant les probabilités qui vont avec.
2. L'espérance s'obtient comme une moyenne dans le tableau précédent.
3. L'espérance étant négative... mais le joueur peut toujours tenter sa chance !

III Correction

1/ a/ $p(F)$ représente la probabilité que le billet soit faux. Donc $p(F) = 0,02$.
De plus, $p_F(T)$ représente la probabilité que la machine détecte un faux billet sachant que le billet est faux, donc $p_F(T) = 0,99$.
Enfin, $p_{\overline{F}}(\overline{T})$ représente la probabilité que la machine ne détecte pas un faux billet sachant que le billet est un vrai, donc $p_{\overline{F}}(\overline{T}) = 0,97$.
Ce qui nous donne l'arbre suivant :



b/ On calcule :
$p(F \cap T) = p_F(T) \times p(F) = 0,99 \times 0,02 = 0,0198$.
Donc $p(F \cap T) = 0,0198$.

2/ On cherche à calculer $p(T)$. D'après la formule des probabilités totales, on calcule :
$p(T) = p(T \cap F) + p(T \cap \overline{F}) = 0,0198 + p_{\overline{F}}(T) \times p(\overline{F}) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0198 + 0,0294 = 0,0492$
Donc la probabilité que la machine détecte un faux billet est de 0,0492.

3/ On cherche à calculer $p_T(F)$. On calcule $p_T(F) = \dfrac{p_F(T) \times p(F)}{p(T)} = \dfrac{0,99 \times 0,02}{0,0492} \simeq 0,4024$. Donc la probabilité que "si la machine détecte un faux billet, alors ce billet est faux" est de 40%.

4/ On cherche à calculer $p_{\overline{T}}(\overline{F})$. On calcule $p_{\overline{T}}(\overline{F}) = \dfrac{p_{\overline{F}}(\overline{T}) \times p(\overline{F})}{p(\overline{T})} = \dfrac{0,97 \times 0,98}{1 - 0,0492} = \dfrac{0,97 \times 0,98}{0,9508} \simeq 0,9998$.
Donc la probabilité que le billet soit vrai sachant qu'il n'a pas été détecté comme faux billet est de 0,9998.

5/ On cherche à savoir si $p(F \cap T)$ et $p(F) \times p(T)$ sont égaux. On calcule :
$p(F \cap T) = 0,0198$
$p(F) \times p(T) = 0,02 \times 0,0492 \simeq 0,0010$
Donc $p(F \cap T) \neq p(F) \times p(T)$. Les événements F et T ne sont donc pas indépendants.

6/ On voit qu'avec la machine, la probabilité que le billet soit vrai lorsque la machine ne détecte pas un billet faux est bien au dessus de 0,98. Le gérant semble donc avoir fait une bonne affaire.

PARTIE II

1. On sait qu'il y a 37 issues possibles, qui sont toutes équiprobables. On en déduit que X suit la loi de probabilités suivant :

k	-10	2	20
$p(X = k)$	$\frac{18}{37}$	$\frac{18}{37}$	$\frac{1}{37}$

2. On calcule :
$E(X) = -10 \times \dfrac{18}{37} + 2 \times \dfrac{18}{37} + 20 \times \dfrac{1}{37} = \dfrac{-10 \times 18 + 2 \times 18 + 20}{37} = \dfrac{-124}{37} \simeq -3,35$
3. Si le joueur participe à un grand nombre de parties, on voit donc qu'il risque de perdre 3,35 euros par partie. Le jeu n'est donc pas favorable au joueur.