I Sujet

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points

$$A(3;-2;2), B(4;-3;6), C(5;-1;4)$$

1/ a/ Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, et que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

b/ Montrer que le vecteur $\vec{n}(2;-2;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c/ En déduire une équation du plan (ABC).

2/ Soient P et P' les plans d'équations respectives $3x-3y-2z-5=0$ et $-x+7y-z+13=0$.

a/ Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants, et que leur intersection est une droite dont on précisera l'équation.

b/ Montrer que les plans (ABC), P et P' ont un unique point d'intersection dont on déterminera les coordonnées.

II Coup de pouce

1/ a/ Pour démontrer que trois points ne sont pas alignés, on démontre que deux vecteurs partageant un point commun ne sont pas colinéaires ;

Pour démontrer qu'un triangle est rectangle, on utilise le produit scalaire (la seule véritable utilité du produit scalaire !)

Pour calculer la norme d'un vecteur dans l'espace, on a la formule qui ressemble beaucoup à celle de Pythagore, à savoir $\|\vec{a}\| = \sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$.

b/ Deux possibilités : soit on utilise deux fois le produit scalaire avec deux vecteurs non orthogonaux du plan ABC, soit (quand l'énoncé vicieux ne donne pas les coordonnées du vecteur à trouver), on utilise le produit vectoriel (qui est au programme !)

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{pmatrix} y_{\vec{a}}\times z_{\vec{b}} - y_{\vec{b}}\times z_{\vec{a}} \\ z_{\vec{a}}\times x_{\vec{b}} - z_{\vec{b}}\times x_{\vec{a}} \\ x_{\vec{a}}\times y_{\vec{b}} - x_{\vec{b}}\times y_{\vec{a}} \end{pmatrix}$$

c/ Quand on a les coordonnées d'un vecteur normal au plan, de la forme $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, l'équation du plan est de la forme $Ax+By+Cz+d=0$, puis il faut déterminer d.

2/ a/ Deux plans sont sécants en une droite si leurs vecteurs normaux ne sont pas parallèles. Puis on résout un système pour trouver une équation paramétrique de la droite.

b/ Un plan et une droite sont sécants en un point si un vecteur normal du plan et un vecteur directeur de la droite ne sont pas orthogonaux. Puis on résout un système pour obtenir les coordonnées du point.

III Correction

Pour la correction, j'ai préféré écrire toutes les coordonnées en vecteur colonne, afin que ce soit plus lisible. Ça ne change évidemment rien au fond :)

1/ a/ On calcule :

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ -2-(-3) \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En observant les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{CB}$, on remarque que les côtes sont identiques mais pas les ordonnées. On en déduit qu'il n'existe aucun réel k tel que $\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{AC}$, donc que $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc que A, B et C ne sont pas alignés.

En observant les coordonnées de ces trois vecteurs, on peut remarquer que $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont des coordonnées similaires. Ce sont donc probablement eux qui sont de mêmes normes (c'est à dire que, probablement, $CB = AC$).

On calcule :
$\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$. De même, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$.
De plus, $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC} = -1\times 2 + -2 + 2\times 2 = -2+(-2)+4 = 0$. Donc $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
On en déduit que ABC est un triangle isocèle rectangle en C.

b/ Calculons le produit vectoriel de $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 2 - 2\times 1 \\ 2\times 2 - (-1)\times 2 \\ -1\times 1 - (-2)\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\times\vec{n}$$

Donc $\vec{n}$ est bien un vecteur normal au plan (ABC).

c/ D'après les coordonnées du vecteur $\vec{n}$, on déduit que le plan (ABC) admet pour équation $2x-2y-z+d = 0$, avec d un réel à déterminer.
On sait de plus que $A\in(ABC)$, donc les coordonnées de A vérifient l'équation de (ABC).

$$2x_A - 2y_A - z_A + d = 0 \Leftrightarrow 2\times 3 - 2\times(-2) - 2 + d = 0 \Leftrightarrow 6+4-2+d = 0 \Leftrightarrow d = -8$$

Donc l'équation du plan (ABC) est $2x-2y-z-8 = 0$

2/ a/ On sait qu'un vecteur normal au plan P est $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. De plus, on rappelle que les coordonnées de $\vec{n}$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On remarque que $z_{\vec{u}} = 2z_{\vec{n}}$, mais que $y_{\vec{u}} \neq 2y_{\vec{n}}$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, donc (ABC) et P sont sécants en une droite.
On calcule :

$$\left\{\begin{array}{lllll} 2x & -2y & -z & -8 & = 0 \\ 3x & -3y & -2z & -5 & = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} -6x & +6y & +3z & +24 & = 0 \\ 6x & -6y & -4z & -10 & = 0 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} -6x & +6y & +3z & +24 & = 0 \\ 0 & +0 & -z & +14 & = 0 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} -6x & +6y & +66 & = 0 \\ & & z & = 14 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y & = x-11 \\ z & = 14 \end{array}\right.$$

On en déduit que l'équation paramétrique de la droite d'intersection des plans P et (ABC), qu'on appelle Δ est, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 11-\lambda \\ z = 14 \end{array}\right.$

b/ On sait qu'un vecteur directeur $\vec{v}$ de Δ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et que les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{u}'$ à P' sont $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Or, $\vec{v}.\vec{u}' = 1\times(-1)+(-1)\times 7+0\times(-1) = -8$. Donc $\vec{v}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas orthogonaux, donc Δ et P' se coupent en un point, noté M.
De plus, les coordonnées de M vérifient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x_M = \lambda \\ y_M = \lambda - 11 \\ z_M = 14 \\ -x_M + 7y_M - z_M + 13 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_M = \lambda \\ y_M = \lambda - 11 \\ z_M = 14 \\ -\lambda + 7(\lambda - 11) - 14 + 13 = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_M = \lambda \\ y_M = \lambda - 11 \\ z_M = 14 \\ 6\lambda - 78 = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_M = 13 \\ y_M = 13 - 11 \\ z_M = 14 \\ \lambda = 13 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_M = 13 \\ y_M = 2 \\ z_M = 14 \\ \lambda = 13 \end{array}\right.$$

Donc les coordonnées du point M, intersection de (ABC), P et P' sont $\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$.