Par Dryss de 19 en Maths !, le 30 novembre 2017

I Sujet

Voir l'énoncé de l'exercice sur le blog : https://19enmaths.fr/suites-et-probabilites-exercice-5/

II Coup de pouce

1/ Partie Probabilités

a/ L'énoncé les donne. Ne pas hésiter à faire un arbre de probabilités si ça vous aide.

b/ La formule de Bayes, encore !

c/ La formule des probabilités totales, encore !

d/ Il faut se rappeler la formule fondamental en probabilités : $p(A) + p(\overline{A}) = 1$ et reprendre les formules déjà démontrées de l'exercice.

2/ Partie Suites

a/ Trois choix pour démontrer que (v_n) est géométrique de raison ρ :

— Calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et démontrer que le résultat ne dépend pas de n (ici est égal à $\dfrac{-3}{20}$).

— Comme l'énoncé donne la raison ρ de la suite, calculer $\dfrac{v_{n+1}}{\rho v_n}$ et prouver que le résultat est 1.

— La meilleure lorsque l'énoncé donne la raison ρ de la suite, calculer $v_{n+1} - \rho v_n$ et démontrer que le résultat est 0.

b/ Formule du cours sur les suites géométriques, mais attention puisque le premier terme de la suite (v_n) est v_1 et non v_0.

c/ Calcul usuel sur les limites.

III Correction

1/ a/ L'énoncé nous donne directement $p_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{20}$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{5}$

b/ On calcule, grâce à la formule de Bayes :

$p(R_{n+1} \cap R_n) = p_{R_n}(R_{n+1}) \times p(R_n) = \dfrac{1}{20} p_n$

$p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times p(\overline{R_n}) = \dfrac{1}{5} q_n.$

c/ On calcule grâce à la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_{n+1} \cap R_n) + p(R_{n+1} \cap \overline{R_n}) = \dfrac{1}{20} p_n + \dfrac{1}{5} q_n$

d/ Pour n fixé, on sait que R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition. Donc $p(R_n) + p(\overline{R_n}) = 1$. Donc $p_n + q_n = 1$ ou encore $q_n = 1 - p_n$.

En remplaçant dans la formule précédente :

$p_{n+1} = \dfrac{1}{20} p_n + \dfrac{1}{5} q_n = \dfrac{1}{20} p_n + \dfrac{1}{5}(1 - p_n) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{20} p_n - \dfrac{4}{20} p_n = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{20} p_n$

2/ Étude de la suite (p_n).

a/ On cherche à savoir si $v_{n+1} = \dfrac{-3}{20} v_n$. On calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - \frac{-3}{20} v_n &= p_{n+1} - \frac{4}{23} - \left[\frac{-3}{20} \left(p_n - \frac{4}{23} \right) \right] \\
&= \frac{1}{5} - \frac{3p_n}{20} - \frac{4}{23} + \frac{3}{20} \left(p_n - \frac{4}{23} \right) \\
&= \frac{23}{115} - \frac{3p_n}{20} - \frac{20}{115} + \frac{3p_n}{20} - \frac{3}{115} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \dfrac{-3}{20} v_n$.

On en déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison $\rho = \dfrac{-3}{20}$ et de premier terme $v_1 = p_1 - \dfrac{4}{23} = \dfrac{-4}{23}$.

b/ Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $\rho = \dfrac{-3}{20}$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{-4}{23}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = v_1 \times \rho^{n-1} = \frac{-4}{23} \times \left(\frac{-3}{20} \right)^{n-1}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = v_n + \dfrac{4}{23} = \dfrac{-4}{23} \times \left(\dfrac{-3}{20} \right)^{n-1} + \dfrac{4}{23}$.

c/ On sait que (v_n) est une suite géométrique de raison comprise strictement entre 1 et -1. On en déduit que (v_n) converge vers 0. Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = v_n + \dfrac{4}{23}$, on en déduit que (p_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} p_n = \dfrac{4}{23}$.